



This is a digital copy of a book that was preserved for generations on library shelves before it was carefully scanned by Google as part of a project to make the world's books discoverable online.

It has survived long enough for the copyright to expire and the book to enter the public domain. A public domain book is one that was never subject to copyright or whose legal copyright term has expired. Whether a book is in the public domain may vary country to country. Public domain books are our gateways to the past, representing a wealth of history, culture and knowledge that's often difficult to discover.

Marks, notations and other marginalia present in the original volume will appear in this file - a reminder of this book's long journey from the publisher to a library and finally to you.

Usage guidelines

Google is proud to partner with libraries to digitize public domain materials and make them widely accessible. Public domain books belong to the public and we are merely their custodians. Nevertheless, this work is expensive, so in order to keep providing this resource, we have taken steps to prevent abuse by commercial parties, including placing technical restrictions on automated querying.

We also ask that you:

- + *Make non-commercial use of the files* We designed Google Book Search for use by individuals, and we request that you use these files for personal, non-commercial purposes.
- + *Refrain from automated querying* Do not send automated queries of any sort to Google's system: If you are conducting research on machine translation, optical character recognition or other areas where access to a large amount of text is helpful, please contact us. We encourage the use of public domain materials for these purposes and may be able to help.
- + *Maintain attribution* The Google "watermark" you see on each file is essential for informing people about this project and helping them find additional materials through Google Book Search. Please do not remove it.
- + *Keep it legal* Whatever your use, remember that you are responsible for ensuring that what you are doing is legal. Do not assume that just because we believe a book is in the public domain for users in the United States, that the work is also in the public domain for users in other countries. Whether a book is still in copyright varies from country to country, and we can't offer guidance on whether any specific use of any specific book is allowed. Please do not assume that a book's appearance in Google Book Search means it can be used in any manner anywhere in the world. Copyright infringement liability can be quite severe.

About Google Book Search

Google's mission is to organize the world's information and to make it universally accessible and useful. Google Book Search helps readers discover the world's books while helping authors and publishers reach new audiences. You can search through the full text of this book on the web at <http://books.google.com/>



Über dieses Buch

Dies ist ein digitales Exemplar eines Buches, das seit Generationen in den Regalen der Bibliotheken aufbewahrt wurde, bevor es von Google im Rahmen eines Projekts, mit dem die Bücher dieser Welt online verfügbar gemacht werden sollen, sorgfältig gescannt wurde.

Das Buch hat das Urheberrecht überdauert und kann nun öffentlich zugänglich gemacht werden. Ein öffentlich zugängliches Buch ist ein Buch, das niemals Urheberrechten unterlag oder bei dem die Schutzfrist des Urheberrechts abgelaufen ist. Ob ein Buch öffentlich zugänglich ist, kann von Land zu Land unterschiedlich sein. Öffentlich zugängliche Bücher sind unser Tor zur Vergangenheit und stellen ein geschichtliches, kulturelles und wissenschaftliches Vermögen dar, das häufig nur schwierig zu entdecken ist.

Gebrauchsspuren, Anmerkungen und andere Randbemerkungen, die im Originalband enthalten sind, finden sich auch in dieser Datei – eine Erinnerung an die lange Reise, die das Buch vom Verleger zu einer Bibliothek und weiter zu Ihnen hinter sich gebracht hat.

Nutzungsrichtlinien

Google ist stolz, mit Bibliotheken in partnerschaftlicher Zusammenarbeit öffentlich zugängliches Material zu digitalisieren und einer breiten Masse zugänglich zu machen. Öffentlich zugängliche Bücher gehören der Öffentlichkeit, und wir sind nur ihre Hüter. Nichtsdestotrotz ist diese Arbeit kostspielig. Um diese Ressource weiterhin zur Verfügung stellen zu können, haben wir Schritte unternommen, um den Missbrauch durch kommerzielle Parteien zu verhindern. Dazu gehören technische Einschränkungen für automatisierte Abfragen.

Wir bitten Sie um Einhaltung folgender Richtlinien:

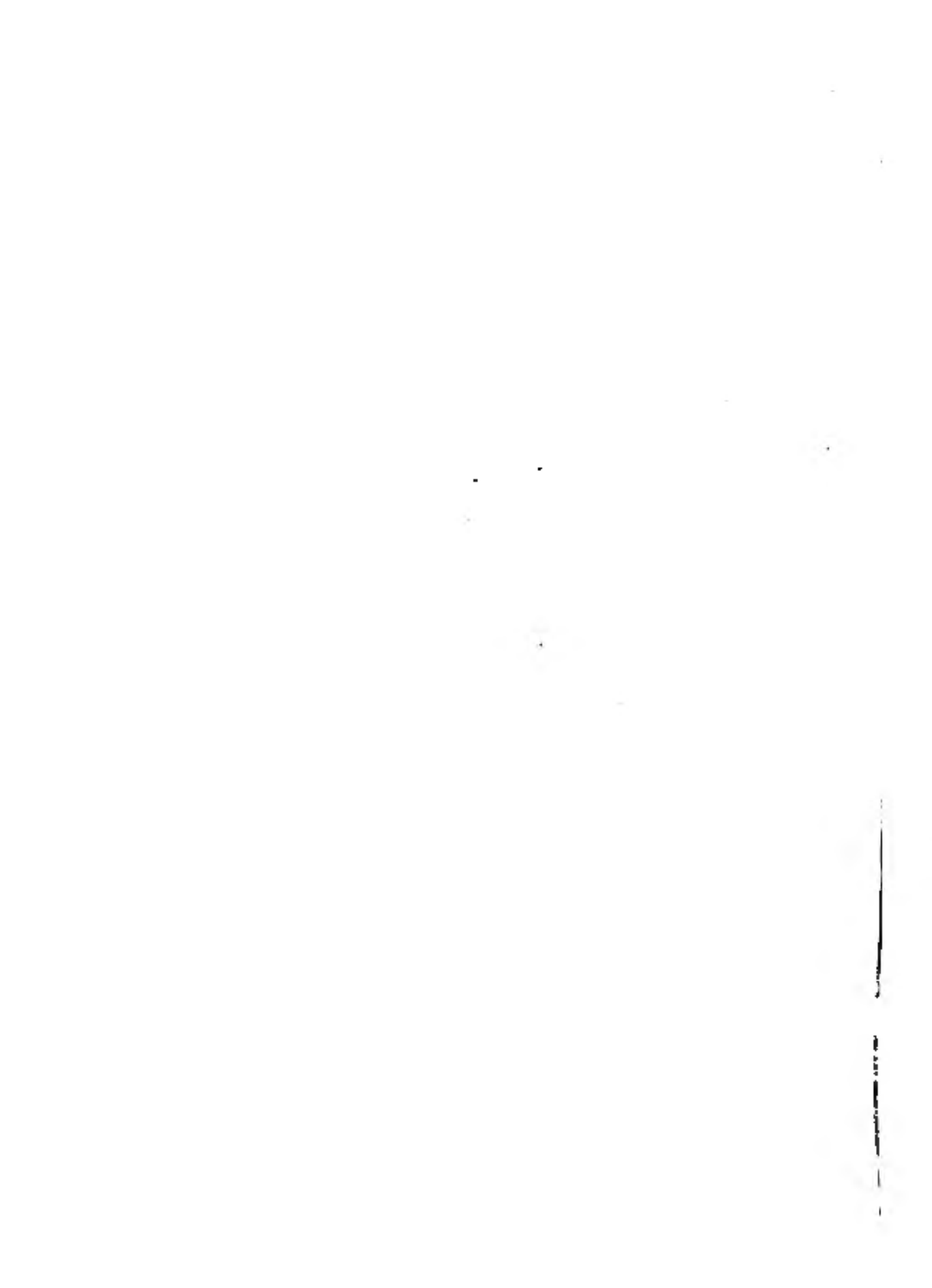
- + *Nutzung der Dateien zu nichtkommerziellen Zwecken* Wir haben Google Buchsuche für Endanwender konzipiert und möchten, dass Sie diese Dateien nur für persönliche, nichtkommerzielle Zwecke verwenden.
- + *Keine automatisierten Abfragen* Senden Sie keine automatisierten Abfragen irgendwelcher Art an das Google-System. Wenn Sie Recherchen über maschinelle Übersetzung, optische Zeichenerkennung oder andere Bereiche durchführen, in denen der Zugang zu Text in großen Mengen nützlich ist, wenden Sie sich bitte an uns. Wir fördern die Nutzung des öffentlich zugänglichen Materials für diese Zwecke und können Ihnen unter Umständen helfen.
- + *Beibehaltung von Google-Markenelementen* Das "Wasserzeichen" von Google, das Sie in jeder Datei finden, ist wichtig zur Information über dieses Projekt und hilft den Anwendern weiteres Material über Google Buchsuche zu finden. Bitte entfernen Sie das Wasserzeichen nicht.
- + *Bewegen Sie sich innerhalb der Legalität* Unabhängig von Ihrem Verwendungszweck müssen Sie sich Ihrer Verantwortung bewusst sein, sicherzustellen, dass Ihre Nutzung legal ist. Gehen Sie nicht davon aus, dass ein Buch, das nach unserem Dafürhalten für Nutzer in den USA öffentlich zugänglich ist, auch für Nutzer in anderen Ländern öffentlich zugänglich ist. Ob ein Buch noch dem Urheberrecht unterliegt, ist von Land zu Land verschieden. Wir können keine Beratung leisten, ob eine bestimmte Nutzung eines bestimmten Buches gesetzlich zulässig ist. Gehen Sie nicht davon aus, dass das Erscheinen eines Buchs in Google Buchsuche bedeutet, dass es in jeder Form und überall auf der Welt verwendet werden kann. Eine Urheberrechtsverletzung kann schwerwiegende Folgen haben.

Über Google Buchsuche

Das Ziel von Google besteht darin, die weltweiten Informationen zu organisieren und allgemein nutzbar und zugänglich zu machen. Google Buchsuche hilft Lesern dabei, die Bücher dieser Welt zu entdecken, und unterstützt Autoren und Verleger dabei, neue Zielgruppen zu erreichen. Den gesamten Buchtext können Sie im Internet unter <http://books.google.com> durchsuchen.

THE GIFT OF
From The Estate of
Charles K. Wood

100



Main.

QA

43

.K83

Formel-Sammlung

aus der

reinen Mathematik

und

aus den mechanischen Wissenschaften.

Für praktische

Baugewerk- und Maschinen-Meister,

sowie für Studirende technischer Lehr-Anstalten.

Von

C. KOPKA,

praktischer Ingenieur und Direktor der technischen Lehr-Anstalt für Bau-
und Maschinen-Wesen zu Goslar,

Mitarbeiter des „Zivil-Ingenieur“ und der „Romberg'schen Zeitschrift für
praktische Baukunst“. Verfasser der „Bau-Mechanik“.

Mit ca. 500 in den Text

gedruckten Holzschnitten.

Leipzig 1873.

CARL SCHOLTZE.

74

Formel-Sammlung

aus der

reinen Mathematik

und aus

den mechanischen Wissenschaften.

14

Formel-Sammlung

aus der

reinen Mathematik

und aus

den mechanischen Wissenschaften.



Inhalt.

Erste Abtheilung.

	Seite
Geometrie der Ebene	3
Arithmetik — Algebra	17
Logarithmentafel	81
Kurven	106
Flächen-, Schwerpunkts- und Längen-Tafel . . .	139
Körperinhalt, Flächen- und Schwerpunktstafel . .	155
Kurven-Konstruktions-Tafel	179
Goniometrische Formel-Tafel	213
Trigonometrische Formel-Tafel 221.	239
Tafel der trigonometrischen Linien und deren Logarithmen	249

Zweite Abtheilung.

Mechanik	275
Hydraulik	303
Tafel I. der theoretischen Wassermenge bei Boden- Deckel und Seitenöffnungen	316
Tafel II. zur Korrektion der theoretischen Wasser- menge in die wahre	325

	Seite
Tafel zur Berechnung der Rohrleitungen	337
Statik und Dynamik der Luft	347
Belastung der Bau-Konstruktionstheile	351
I. Konstruktion der einfach gedrückten oder gezogenen Verbandstücke	353
II. Konstruktion der gedrückten und zugleich auf Biegung beanspruchten Verbandstücke	357
IIIa. Konstruktion der massiven Träger und Balken	362
Belastungstafel	369
IIIb. Konstruktion der Fachwerkträger	379
IV. Konstruktion der Hänge- und Sprengwerke, der eisernen und hölzernen Dachverbände	389
V. Konstruktion der Mauern und Gewölbe	397
VI. Konstruktion der einfachen Maschinentheile, der hydraulischen Motoren, Dampfmaschinen, Pum- pen, Gebläse und Dampfhämmer	403
VII. Eisenbahnbau	437
Kurvenlehre	442
Graphische Statik	482



from the estate
of C. A. K. K. K. K.
17-8-29

VORWORT.

Das vorliegende Werk ist ein ähnliches Buch, wie der „Ingenieur“ von Weissbach und die „Hütte“.

Bei der Zusammenstellung der Formeln und Sätze ist dem Verfasser der Gedanke leitend gewesen, den Herren Praktikanten des Bau- und Maschinenwesens eine Sammlung in die Hände zu legen, die weder Ueberflüssiges bringt, noch des Nothwendigen entbehrt.

Die eigene langjährige Praxis des Verfassers im Bau- und Maschinenwesen hat ihn über die Anforderungen, welche Seitens der Herren Praktikanten an ein solches Werk gemacht werden, belehrt, und ist er daher bemüht gewesen, denselben so viel wie möglich zu entsprechen.

Ingenieur C. KOPKA.

716/32, P. H. C. W.
Q

Mathematics

QA

43

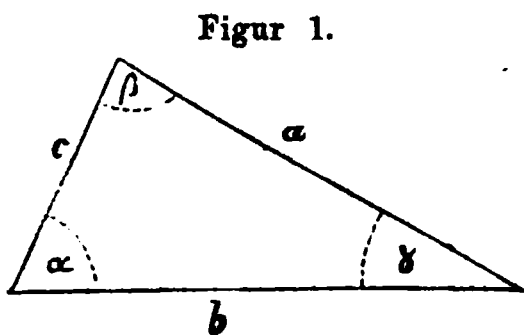
.K83

I. Abtheilung.

Geometrie der Ebene.

Das Dreieck.

1. Dreiecke sind congruent, wenn von den 6 Stücken $\alpha \beta \gamma$ und $a b c$, durch die sie bestimmt sind, 3 einander gleich sind, jedoch muss unter diesen 3 Stücken mindestens eine der 3 Seiten enthalten sein.



2. Die auf der Mitte der Seiten errichteten Lothe schneiden sich alle in einem Punkte. Dieser Punkt liegt von allen 3 Ecken gleich weit entfernt.

3. Die aus den Eckpunkten auf die 3 Seiten gefällten Lothe schneiden sich gleichfalls in einem Punkte.

4. Die auf den Seiten willkürlich errichteten Lothe schneiden sich mit unter den Winkeln des Dreiecks. Dasselbe geschieht, wenn diese Linien keine Lothe sind, aber unter gleichen Winkeln gegen die Dreiecksseiten geneigt sind.

5. Die die Winkel halbirenden Transversalen schneiden sich in einem Punkte. Dieser Punkt ist von allen 3 Seiten gleich weit entfernt.

6. Die die Seiten halbirenden Transversalen schneiden sich in einem Punkte — dem Schwerpunkte.

7. Die Summe aller Winkel im Dreiecke ist gleich 2 Rechten.

8. Der Aussenwinkel ist so gross wie die Summe der gegenüberstehenden Winkel.

9. Im gleichschenkligen Dreiecke halbirt das aus der Spitze gefällte Loth die Grundlinie. Die Winkel an derselben sind gleich.

10. Im gleichseitigen Dreiecke sind alle 3 Winkel gleich. Ein jeder beträgt 60 Grad.

Das Viereck.

11. Vierecke sind congruent:

- a. wenn alle 4 Seiten und 1 Winkel gleich sind,
- b. wenn 3 Seiten und der eingeschlossene Winkel gleich sind,
- c. wenn 2 Seiten, der eingeschlossene Winkel und 2 andere Winkel gleich sind.

12. Die Summe aller Winkel ist $= 4$ Rechte.

13. In einem Parallelogramm stehen gleiche Winkel und auch gleiche Seiten sich gegenüber.

14. Ein Viereck ist ein Parallelogramm, wenn

- a. 2 Gegenseiten gleich und parallel sind,
- b. wenn dieselben paarweise einander gleich sind,
- c. wenn 2 Gegenseiten und 2 Gegenwinkel gleich sind,
- d. wenn 2 Gegenseiten gleich, 2 andere parallel und 2 Gegenwinkel gleichartig sind,
- e. wenn die Gegenwinkel gleich sind und beide Diagonalen.

15. Die Diagonalen in einem Parallelogramme halbiren sich gegenseitig und bilden 4 inhaltsgleiche Dreiecke.

Das Polygon.

16. Die Summe der Winkel eines n Ecks ist
 $= n \cdot 2 \text{ Rechte} - 4.$
17. Die Summe der Aussenwinkel ist stets
 $= 4 \text{ Rechte}.$
18. In einem n Eck beträgt die Anzahl der möglichen Diagonalen

$$\frac{n}{2} (n - 3)$$

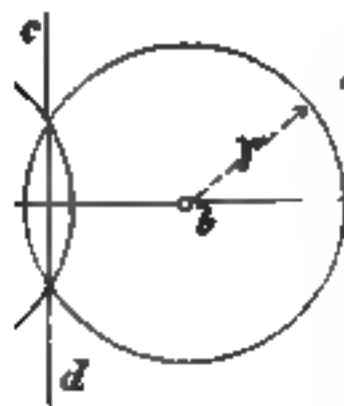
Der Kreis.

19. Der Durchmesser ist die grösste aller Sehnen und theilt den Kreis in 2 congruente Hälften.
20. Der senkrecht auf die Sehne gezogene Halbmesser theilt Sehne und Bogen in 2 gleiche Theile.
21. Durch 3 Punkte, die nicht in einer Geraden liegen, lässt sich stets ein Kreis legen.
22. Gleiche Sehnen sind vom Kreismittelpunkte gleich weit entfernt, und von 2 ungleichen Sehnen ist die kleinere die entferntere.
23. 2 Sehnen, die nicht dem Durchmesser gleich sind, können sich nicht halbiren.
24. Die Tangente berührt den Kreis nur an einem Punkte.
25. Wenn ein Kreis und eine Gerade 2 Punkte gemein haben, so schneiden sie sich.
26. Zwischen zwei parallelen Sehnen liegen gleiche Bogen.
27. Die Tangente steht senkrecht auf dem Ende des Radius.
28. 2 aus einem Punkte an den Kreis gezogene Tangenten sind gleich lang.
29. In dem um den Kreis beschriebenen Vierecke ist die Summe der Gegenseiten einander gleich.

2 Kreise sich schneiden, so geschieht dieses

Dabei steht cd senkrecht auf ab , Figur 2.

Figur 2.



31. 2 Kreise schneiden sich, wenn der Abstand ihrer Mittelpunkte kleiner als $r + r$, und grösser als $r - r$, ist. Sie berühren sich, wenn der Abstand der Mittelpunkte $= r + r$, oder $= r - r$, ist.

32. Zwei Kreise können sich nur in einem Punkte berühren.

33. Bei sich berührenden Kreisen geht cd , Figur 2, durch den Berührungspunkt.



34. Die auf der Sehne AC , Figur 3, stehenden Peripheriewinkel $\beta \beta$ u. s. w. sind alle unter einander gleich und halb so gross wie der Centriwinkel γ .

35. Geht die Sehne durch den Mittelpunkt, so sind die Winkel $\beta \beta$ u. s. w. jeder $= 1$ Rechten.

36. Die Summe der Gegenwinkel des in den Kreis beschriebenen Vierecks ist stets $= 2$ Rechte.

37. Ein Kreis, der durch 3 Punkte eines Vierecks geht, inkel 2 Rechte betragen, geht auch durch nkt.

on der Tangente AB und der Sehne AC Winkel α ist gleich den Peripheriewinkeln

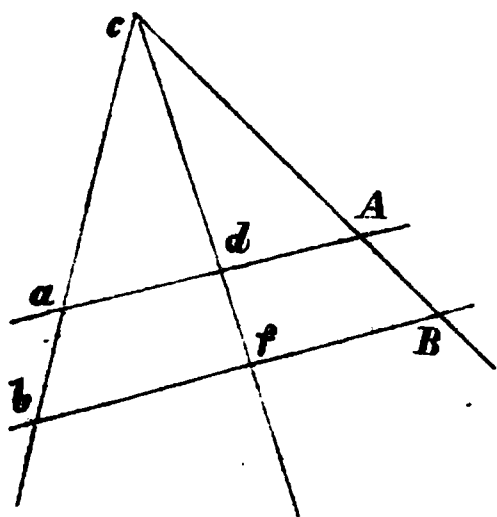
39. Der von den Tangenten AB und BC eingeschlossene Winkel δ ist mit dem Centriwinkel γ zusammen $= 2$ Rechte.

40. In und um jeden Kreis kann man ein reguläres Polygon beschreiben, und in, sowie um jedes reguläre Polygon lässt sich ein Kreis beschreiben.

Aehnlichkeit der Figuren.

41. Zwei und mehrere in einem Punkte sich schneidende Linien heissen Convergenten. Ihre durch Querlinien aA bB gebildeten Abschnitte, die einerlei Lage haben, wie z. B. ac , cd oder ab , df , heissen homologe Abschnitte.

Figur 4.



42. Werden die Convergenten, Figur 4, von Parallelen Aa , Bb geschnitten, so sind die homologen Abschnitte verhältnissgleich und umgekehrt — sind die homologen Abschnitte verhältnissgleich, so sind die Linien, durch welche sie gebildet werden — also Aa und Bb parallel.

43. In ähnlichen Figuren sind die Winkel paarweise einander gleich.

44. Sind die homologen Abschnitte auf den Convergenten verhältnissgleich, so stehen die Parallelen, durch welche sie gebildet werden, in demselben Verhältnisse.

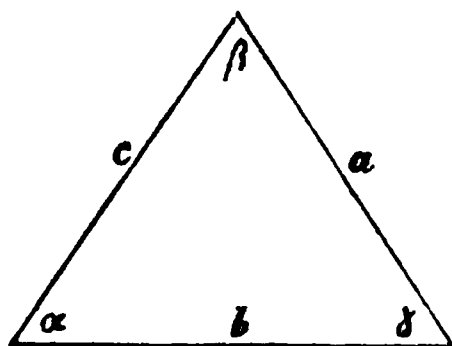
45. In ähnlichen Figuren sind die homologen Seiten verhältnissgleich.

46. Sind die Parallelen aA und bB , Figur 4, mit den Convergenten-Abschnitten cA und cB proportional, so ist c der Convergenzpunkt mit der Linie ab .

Das Dreieck.

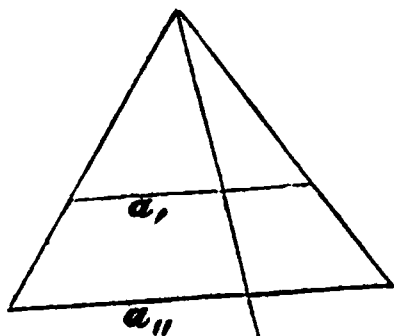
47. Dreiecke sind ähnlich, wenn, Figur 5:

Figur 5:



- a. die Winkel $\alpha \beta \gamma$ paarweise gleich sind,
- b. die Winkel $\beta \gamma$ paarweise gleich sind,
- c. wenn alle Seiten $a b c$ proportional gleich sind,
- d. wenn 2 Seiten a und b proportional, Winkel β gleich und Winkel α gleichartig ist,
- e. Wenn 2 Seiten proportional und der eingeschlossene Winkel gleich ist.

Figur 6.



Die aus der Spitze gezogene beliebige Transversale theilt die mit der Grundlinie parallel gezogene Linie a , in Abschnitte, welche denen auf a'' proportional sind, Figur 6.

48. Die Höhen ähnlicher Dreiecke verhalten sich wie ihre Grundlinien.

49. Werden 2 Dreiecke von gleicher Höhe und Basis von Parallelen in gleichem Abstände von der Basis geschnitten, so sind diese Parallelen einander gleich.

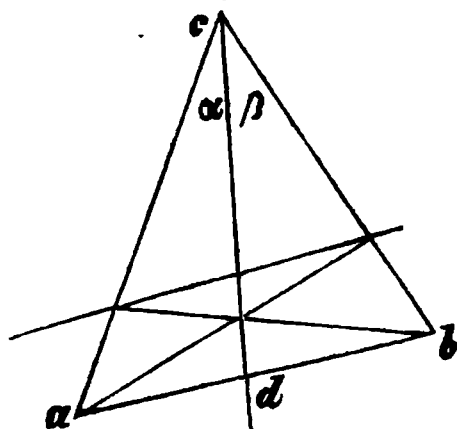
50. Sind die Winkel α u. β , Fig. 7, einander gleich, so verhält sich:

$$a d : a c = d b : b c.$$

51. Die Transversalen, Figur 7, von denen die eine nach der Mitte der Basis und die beiden andern nach den Endpunkten einer zur

Basis parallel gezogenen Linie gehen, schneiden sich in einem Punkte.

Figur 7.



52. Die Transversalen, welche von den Eckpunkten auf die Mitte der Gegenseiten gezogen sind, schneiden sich in einem Punkte, und zwar in einer Entfernung von den Ecken, die $\frac{2}{3}$ von der betreffenden Transversale beträgt.

53. Die Transversale, welche in einem rechtwinkligen Dreiecke von der Spitze lothrecht auf die Basis gezogen wird, theilt dasselbe in zwei ähnliche Dreiecke.

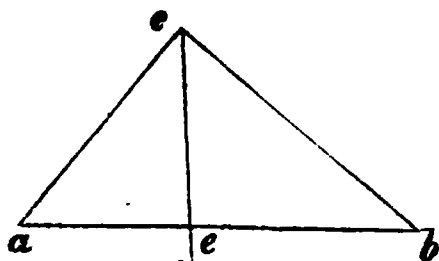
54. In einem rechtwinkligen Dreiecke ist das Quadrat der Hypothenuse gleich der Summe der Quadrate der Katheten.

55. Wird in einem beliebigen Dreiecke eine senkrechte Transversale auf die Basis gezogen, Figur 8, so verhält sich:

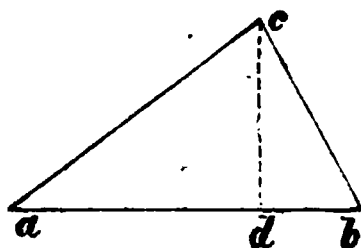
$$(a e + a e) : (b c + b e) = (b c - b e) : (a c - a e),$$

d. h. die Summe der Seiten und Abschnitte verhalten sich umgekehrt wie die Differenzen derselben.

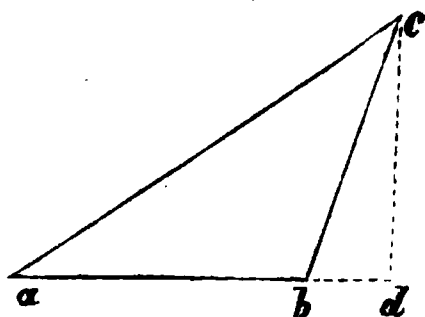
Figur 8.



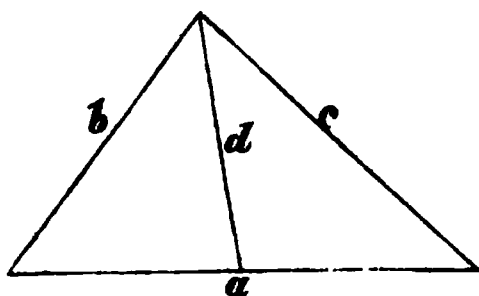
Figur 9.



Figur 10.



Figur 11.



56. Findet in einem Dreiecke die obige Proportion statt, so ist die Transversale eine senkrechte.

57. In einem rechtwinkligen Dreiecke ist das Quadrat einer Kathete gleich dem Produkte aus Hypothenuse und dem anliegenden Abschnitte.

58. In einem rechtwinkligen Dreiecke ist das Quadrat der aus der Spitze auf die Hypothenuse gefällten Senk-

rechten gleich dem Produkte aus den beiden Abschnitten der Hypothenuse.

59. In jedem Dreiecke ist, Figur 9 und 10:

$$\overline{a}^2 c^2 = \overline{a}^2 b^2 + \overline{c}^2 b^2 \mp 2 \overline{a} b \cdot \overline{d} b,$$

und zwar gilt das + Zeichen, wenn der Gegenwinkel von a c stumpf und das — Zeichen, wenn er spitz ist.

60. Wenn, Figur 7, a durch d halbart wird, so hat man:

$$b^2 + c^2 = 2 \left(d^2 + \frac{1}{4} a^2 \right).$$

Polygon und Kreis.

61. Wenn a b c d die Seiten eines Parallelogramms und d₁ und d₂ seine Diagonalen sind, so hat man:

$$d_1^2 + d_2^2 = a^2 + b^2 + c^2 + d^2.$$

62. Aehnliche Polygone lassen sich in ähnliche Dreiecke zerlegen und daraus zusammensetzen.

63. Die Umfänge ähnlicher Figuren verhalten sich wie ihre homologen Seiten und auch wie die homologen Convergentenabschnitte.

64. Reguläre Polygone von gleicher Seitenzahl sind alle ähnlich.

65. Die Peripherien zweier und mehrerer Kreise verhalten sich wie ihre Radien.

66. Die Kreissehne ist mittlere Proportionale zwischen dem Durchmesser und dessen durch ein Loth gebildeten Abschnitt.

67. Konstruirt man im Halbkreise ein rechtwinkliges Dreieck über dem Durchmesser und zieht aus der Spitze ein Loth, so verhalten sich die Quadrate der Sehnen wie die darunter liegenden Abschnitte des Durchmessers.

68. Wenn aus einem Punkte der Kreisperipherie ein Loth auf den Durchmesser gefällt wird, so ist dasselbe die mittlere Proportionale zu den Abschnitten des Durchmessers.

69. Die Abschnitte zweier sich schneidenden Sehnen sind verhältnissgleich.

Abschnitte zweier aus einem
 ogenen Sekanten.

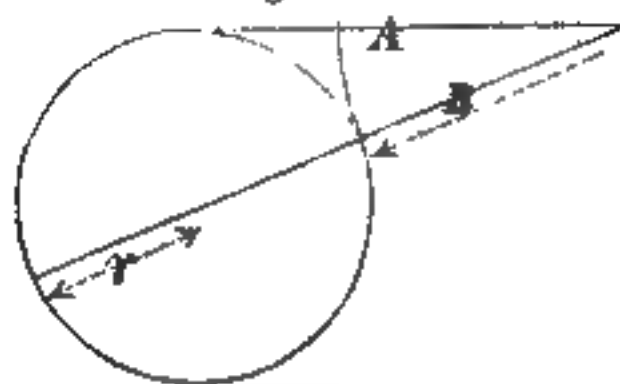
71. Wird aus einem Punkte c,
 ur 12, eine Tangente und eine
 ante zum Kreise gezogen, so
 die Tangente die middle Pro-
 tionale zur Sekante und ihrem
 seren Abschnitte also:

$$d c : b c = b c : a c.$$

72. Die Abschnitte zweier
 ch den Berührungspunkt ge-
 enen Sekanten sind propor-
 ial also:

$$c : c b = e d : c e \quad \text{Figur 13.}$$

Figur 14.



die Tangente $A = 2 r$ gemacht
 te durch den Mittelpunkt des
 n wird, Figur 14, so ist:

$$: B = B : A - B.$$

man B auf A ab, so ist A
 seren und mittleren Verhält-
 Sectio divina.

entriwinkel eines Zehnecks ist:

$$, \text{ und Winkel } \alpha = \frac{4}{5} \text{ Rechte.}$$

76. Halbirt man α , Figur 15, so ist:

$$\triangle abc \sim \triangle acd,$$

und

$$ac : bc = dc : ac,$$

da

$$ac = ab = db$$

ist, so ist auch

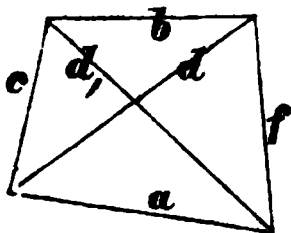
$$db : bc = dc : db,$$

oder

$$bc : db = db : dc,$$

d. h. die Seite des Zehneckes findet man, indem man den Radius nach der Sectio divina theilt.

Figur 16.



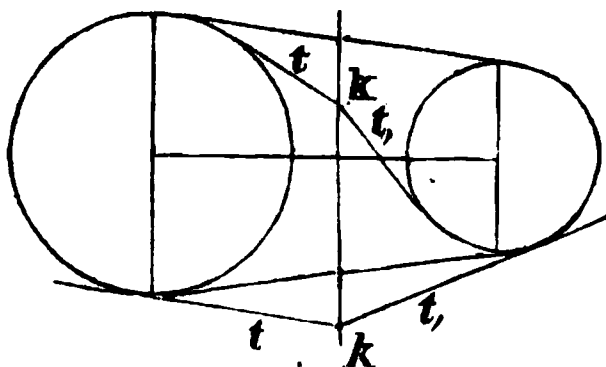
77. Bei jedem in dem Kreise beschriebenen Vierecke ist:

$$d \cdot d = ab + cf. \text{ Figur 16.}$$

78. Die gemeinsame Achse zweier Kreise und die gemeinsamen Tangenten beider Kreise convergiren in einem Punkte.

79. Die von einem Punkte der gemeinsamen Sekante zweier sich schneidender Kreise an dieselben gezogenen Tangenten sind gleich.

Figur 17.



80. Wenn man durch die Mitte des Abstandes der Berührungssehne zweier Kreise eine Senkrechte zieht, so sind die aus irgend einem Punkte k derselben an die Kreise gezogenen Tangenten $tu \cdot t$ einander gleich. Fig. 17.

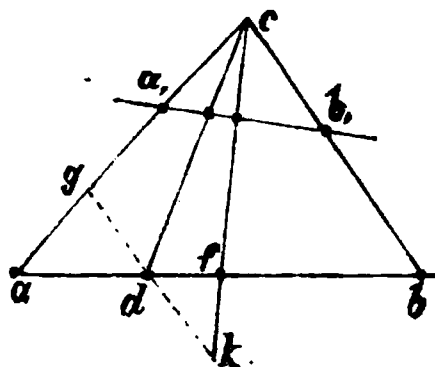
Harmonische Theilung.

81. Wird auf der Linie db , Figur 18, ein Punkt f angenommen und in der Verlängerung von db ein Punkt a

so bestimmt, dass die Abstände des Punktes f von d und b proportional sind den Abständen des Punktes a von d und b ,
so ist die Linie db nach a harmonisch getheilt.

Figur 18.

Figur 18.



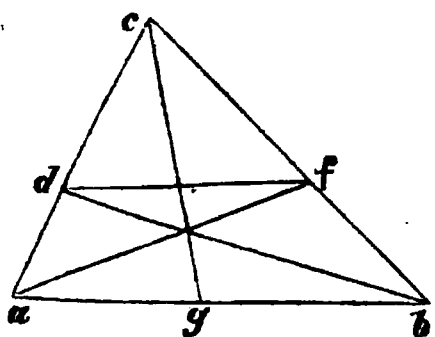
Die Punkte a und f, d und b heissen harmonische Gegenpunkte, die Linien \overline{ac} und \overline{cf} , sowie cd und cb harmonische Gegenstrahlen.

82. Eine Gerade ab wird nach a harmonisch getheilt, indem man aus den 3 Punkten $a d b$ Strahlen nach einem beliebigen Punkte c zieht, hierauf durch d die Linie gk parallel cb legt, $gd = dk$ macht und kc zieht. Der Schnittpunkt f ist der harmonische Gegenpunkt von a .

83. Zu 3 harmonischen Strahlen findet man den vierten, wenn man durch die Strahlen die Linie a b legt und auf ihr nach dem vorigen den Punkt f sucht.

84. Harmonische Strahlen werden von jeder beliebigen Geraden in harmonischen Punkten geschnitten. Figur 18, Linie a, b,.

Figur 19.



85. Werden in einem Dreiecke 3 Transversalen gezogen, wovon die eine cg die Basis halbirt und die beiden andern deren Endpunkte mit einer Parallele df verbinden, so ist cg harmonisch getheilt. Fig. 19.

86. Werden die Seiten des Dreiecks in den Punkten $d f g$ halbiert, und Parallelen $d g$ und $g f$ gezogen, so sind alle 3 Transversalen harmonisch getheilt.

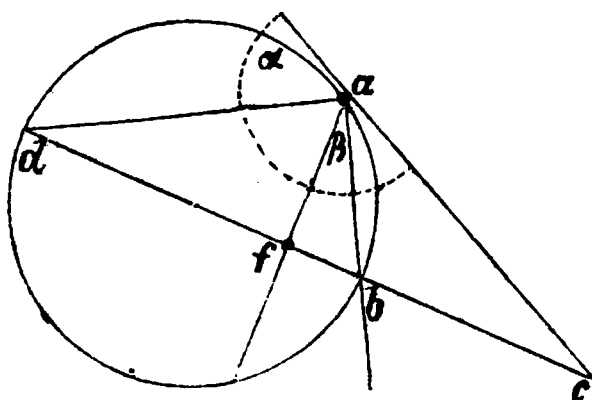
87. Der harmonische Gegenstrahl ab einer Geraden ad , Fig. 20, welcher den Winkel β halbiert, steht mit ad senkrecht.

88. Steht ein harmonischer Strahl auf dem anderen senkrecht, so werden die Winkel α und β , Figur 20, halbiert.

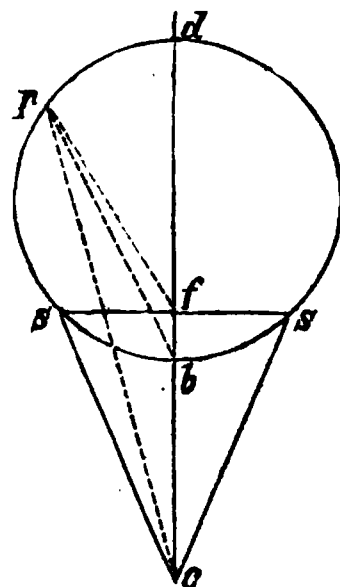
89. Ein Punkt c ausserhalb des Kreises, Figur 21, hat einen harmonischen Gegenpunkt f auf der Mitte der Berührungssehne $s s$.

90. Beschreibt man durch die harmonischen Punkte d und b einen Kreis, so dass Linie $d b$ Durchmesser wird, so

Figur 20.



Figur 21.



sind die Abstände sämtlicher Punkte seiner Peripherie von den harmonischen Punkten f und c verhältnissgleich.
Für den beliebigen Punkt c ist z. B.:

$$p f : p c = b f : b c.$$

Reguläre Polygone.

Bezeichnet

- n die Anzahl der Seiten,
- t die Länge der Seiten eines um den Kreis beschriebenen n Ecks,
- s die Seitenlänge des in den Kreis beschriebenen n Ecks,
- r den Radius,
- y die Seite des in den Kreis beschriebenen $2 n$ Ecks,

so ist:

$$91. \quad t = \frac{rs}{\sqrt{r^2 - \frac{1}{4}s^2}},$$

$$y = \sqrt{(2r^2 - 2r\sqrt{r^2 - \frac{1}{4}s^2})},$$

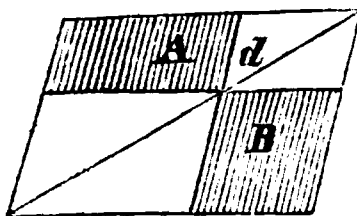
$$y = r\sqrt{\left(2 - \frac{2s}{t}\right)}.$$

Flächenverhältnisse.

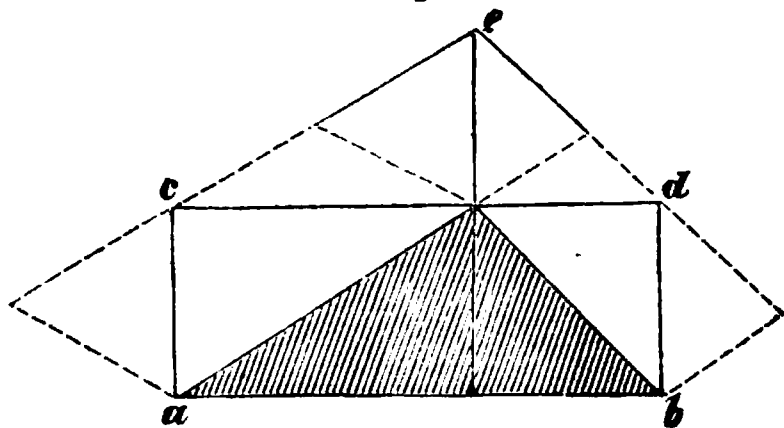
92. Parallelogramme von gleicher Basis und gleicher Höhe haben gleichen Flächengehalt. Ebenso Dreiecke von gleicher Basis und gleicher Höhe.

93. Wenn man durch einen beliebigen Punkt d der Diagonale eines Parallelogramms, Figur 22, Parallelen mit den Seiten zieht, so sind die Flächen A und B einander gleich.

Figur 22.



Figur 23.



94. Das Quadrat der Summe oder Differenz zweier Linien ist gleich der Summe der Quadrate beider $+$ oder 2 mal dem aus beiden gebildeten Rechtecke.

95. Wenn man, Figur 23, über 2 Seiten eines beliebigen Dreiecks beliebige Parallelogramme konstruiert, ihre Aussen-seiten bis zum Schnittpunkte c verlängert, von c durch die Spitze des Dreiecks bis zur Basis eine Gerade zieht und mit dieser von a und b aus Parallellinien legt, so entsteht

ein Parallelogramm $a b c d$, dessen Fläche gleich ist der Summe der beiden anderen Parallelogramme.

96. Die Flächenräume zweier Parallelogramme oder Dreiecke verhalten sich bei gleicher Höhe wie ihre Grundlinien und umgekehrt.


97. Die Flächenräume zweier Parallelogramme, die gleiche Winkel haben, verhalten sich wie die Produkte aus 2 anliegenden Seiten.

98. Die Flächenräume zweier Dreiecke, die einen Winkel gleich haben, verhalten sich wie die Produkte aus den ihn einschliessenden Seiten.

99. Die Flächenräume ähnlicher Dreiecke und Polygone verhalten sich wie die Quadrate der homologen Seiten und auch wie die Quadrate der homologen Convergentenabschnitte.

100. Die Flächenräume zweier Kreise verhalten sich wie die Quadrate der Halbmesser.

101. Der Flächeninhalt eines Sektors (Kreisausschnittes) verhält sich zur ganzen Kreisfläche wie der Bogen zur ganzen Peripherie.



Arithmetik — Algebra.

Entgegengesetzte Grössen.

Bedeutet:

Σp die Summe aller positiven zu addirenden Grössen,

Σn jene aller negativen,

D die Differenz beider,

so ist: $\Sigma p + \Sigma n = + D$, wenn $p > n$,
 $= - D$, „ $p < n$.

Ferner ist:

$$\begin{aligned} & \frac{\pm a}{\text{minus } \pm b} \\ &= \pm a \mp b, \\ & \pm a \times \pm b = + a b, \\ & \pm a \times \mp b = - a b, \\ & \frac{\pm a}{\pm b} = + \frac{a}{b}, \\ & \frac{\pm a}{\mp b} = \frac{\mp a}{\pm b} = - \frac{a}{b}. \end{aligned}$$

Algebraische Zeichen und Operationen.

$$a + b + c = b + c + a = c + a + b.$$

$$a + (-b) = a - b = -(b - a) = -(-a + b).$$

$$a - (+b) = a + (-b).$$

$$a - (-b) = a + (+b) = a + b.$$

$$a + (b + c - d) + m = a + b + c - d + m.$$

$$a - (b + c - d) + m = a - b - c + d + m$$

$$ab = ba.$$

$$a(b + c) = ab + ac; a(b - c) = ab - ac, \\ = ac + ab; \quad = -ac + ab$$

$$-a(b + c) = -ab - ac = -(ab + ac).$$

$$a[b + c(d + g - f)] = ab + ac(d + g - f) \\ = ab + acd + acg - acf.$$

$$a[b - c(d + g - f)] = ab - ac(d + g - f) \\ = ab - acd - acg + acf.$$

$$(a + b)[+d + (f - g + k) - m + k(z + y)] \\ = (a + b)d + (a + b)(f - g + k) - (a + b)m + \\ (a + b)(z + y)k,$$

$$(\pm a) : (\pm b) = a : b = + \frac{a}{b},$$

$$(-a) : (+b) = (+a) : (-b) = - \frac{a}{b},$$

$$\frac{a \pm b}{c} = \frac{a}{c} \pm \frac{b}{c},$$

$$\frac{ab}{c} = \frac{a}{c} \cdot b = a \cdot \frac{b}{c},$$

$$\frac{a}{bc} = \frac{a}{b} : c = \frac{a}{c} : b.$$

Brüche.

$$\frac{a}{b} = \frac{am}{bm} = \frac{a : m}{b : m},$$

$$\frac{a}{b} \pm \frac{c}{d} = \frac{a d}{b d} \pm \frac{b c}{b d} = \frac{a d \pm b c}{b d},$$

$$\frac{a}{b} \pm \frac{c}{b} \pm \frac{d}{b} \dots = \frac{a \pm c \pm d \dots}{b}.$$

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{a c}{b d},$$

$$\frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c} = \frac{a d}{b c},$$

$$\frac{0}{a} = 0,$$

$$\frac{a}{0} = \infty \text{ (unendlich),}$$

$$\frac{0}{0} = x \text{ (unbestimmt),}$$

$$\frac{\infty}{\infty} = x \text{ (unbestimmt).}$$

Näherungswerthe.

$$\text{Wenn } \frac{a}{b} = m + \frac{1}{\frac{n+1}{\frac{p+1}{\frac{q+1}{r + \text{etc.}}}}}$$

so sind die Näherungswerthe für $\frac{a}{b}$:

$$m = \frac{m}{1}, m + \frac{1}{n} = \frac{m n + 1}{n}, m + \frac{1}{n + \frac{1}{p}} = \frac{(m n + 1) p + m}{n p + 1}$$

$$m + \frac{1}{n + 1} = \frac{[(m n + 1) p + m] q + m n + 1}{(n p + 1) q + n} \text{ etc.}$$

$$\frac{p + 1}{q}$$

Beispiel. Der Bruch $\frac{124}{103}$ gibt durch Division des jedesmaligen Restes in den vorhergehenden Divisor, also durch die Rechnung:

$$\begin{array}{r} 124 : 103 = 1, \\ \underline{103} \\ 103 : 21 = 4, \\ \underline{84} \\ 21 : 19 = 1, \\ \underline{19} \\ 19 : 2 = 9, \\ \underline{18} \\ 2 : 1 = 2, \\ \underline{2} \\ 0 \end{array}$$

die Quotienten: 1, 4, 1, 9, 2; er lässt sich daher

$$= 1 + \frac{1}{4 + \frac{1}{1 + \frac{1}{9 + \frac{1}{2}}}}$$

setzen und durch folgende Näherungswerthe, wovon die folgenden immer genauer und genauer werden, ausdrücken:

$$\frac{1}{1}, \frac{5}{4}, \frac{6}{5}, \frac{59}{49}, \frac{124}{103}$$

Sind $\frac{a_1}{b_1}$ und $\frac{a_2}{b_2}$ zwei auf einander folgende Nähe-

runge werthe von $\frac{a}{b}$ und r der folgende Nenner oder Quotient, so findet man den entsprechenden Näherungswerth durch die Formel: $\frac{a_3}{b_3} = \frac{r a_2 + a_1}{r b_2 + b_1}$. Z. B. für das Verhältniss des Kreisumfanges zum Durchmesser: 3,14159... $= \frac{314159}{100000}$ führt folgende Rechnung:

$$\begin{array}{r} 314159 : 100000 = 3 \\ \underline{300000} \\ 100000 : 14159 = 7 \\ \underline{99113} \\ 14159 : 887 = 15 \\ \underline{887} \\ 5289 \\ \underline{4435} \\ 887 : 854 = 1 \\ \underline{854} \\ 33 \text{ u. s. w.} \end{array}$$

auf die Quotienten 3, 7, 15, 1 u. s. w. Die hieraus bestimmten Näherungswerthe sind: $\frac{3}{1}$, $3 + \frac{1}{7} = \frac{22}{7}$, ferner nach der letzten Regel:

$$\frac{22 \times 15 + 3}{7 \times 15 + 1} = \frac{333}{106}, \quad \frac{333 \times 1 + 22}{106 \times 1 + 7} = \frac{355}{113}, \text{ u. s. w.}$$

Der Fehler eines Näherungswerthes $\frac{a_n}{b_n}$ ist kleiner als $\left(\frac{1}{b_n}\right)^2$; also für $\frac{22}{7}$ kleiner als $\frac{1}{49}$, für $\frac{333}{106}$ kleiner als $\frac{1}{11236}$ oder 0,000089 u. s. w.

Potenzen.

$$a^m \cdot b^m = (a \cdot b)^m,$$

$$a^m : b^m = \frac{a^m}{b^m} = \left(\frac{a}{b}\right)^m,$$

$$a^m \cdot a^n = a^{m+n},$$

$$a^m : a^n = a^{m-n},$$

$$(a^m)^n = a^{m \cdot n},$$

$$(-a)^{2m} = a^{2m},$$

$$(-a)^{2m+1} = -a^{2m+1},$$

$$(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2,$$

$$(a + b)(a - b) = a^2 - b^2,$$

$$(a \pm b)^3 = a^3 \pm 3a^2b + 3ab^2 \pm b^3,$$

$$a^0 = 1; a^1 = a,$$

$$a^{-m} = \frac{1}{a^m},$$

$$a^m = \frac{1}{a^{-m}},$$

$$a^{-\infty} = 0,$$

$$1^m = 1,$$

$$a^{\frac{1}{m}} = \sqrt[m]{a},$$

$$a^m = \sqrt[m]{a^m}.$$

$$\sqrt[m]{a} \cdot \sqrt[m]{b} = \sqrt[m]{ab} = (ab)^{\frac{1}{m}}.$$

$$\sqrt[m]{a} : \sqrt[m]{b} = \frac{\sqrt[m]{a}}{\sqrt[m]{b}} = \sqrt[m]{\frac{a}{b}} = \left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{1}{m}}.$$

$$\sqrt[m]{a^n} = \left(\sqrt[m]{a}\right)^n = a^{\frac{n}{m}}.$$

$$\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[n]{\sqrt[m]{a}} = a^{\frac{1}{m \cdot n}} = \sqrt[m \cdot n]{a}.$$

$$\sqrt[m]{a^n} = \sqrt[m \cdot p]{a^{n \cdot p}} = \sqrt[m:p]{a^{n:p}}.$$

$$\sqrt[2n]{a} = \pm b; \sqrt[2n]{-a} = b \sqrt{-1} = b i.$$

$$\sqrt[2n+1]{a} = +c; \sqrt[2n+1]{-a} = -c.$$

Wenn:

$$\sqrt{c} = a + b$$

gesetzt wird, so folgt:

$$c = a^2 + 2ab + b^2$$

und:

$$b = \frac{c - a^2}{2a + b} < \frac{c - a^2}{2a}.$$

Wenn:

$$\sqrt[3]{c} = a + b$$

gesetzt wird, so folgt:

$$c = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$

und:

$$b = \frac{c - a^3}{3a^2 + 3ab + b^2} < \frac{c - a^3}{3a^2}.$$

Hierauf gründet sich das Ausziehen der $\sqrt{}$ aus Zahlen.

Beispiele.

$$\sqrt{131044} = 360 + 2 = 362$$

denn	13	10	44
$3^3 =$	9		
	4	10	
$2 \cdot 3 =$.	(6)	
$2 \cdot 3 \cdot 3 =$	3	6	
$6^2 =$.	36	
	3	96	
		14	44
$2 \cdot 36 =$		(7	2)
$2 \cdot 36 \cdot 2 =$		14	4
$2^2 =$.	4
		14	44

	³			
	$\sqrt{17}$	173	512	$= 250 + 8 = 258$
$2^3 =$	8			
	9	173		
$3 \times 2^2 =$	(1	2)..		
$2 \times 2^2 \times 5 =$	6	0..		
$3 \times 2 \times 5^2 =$	1	50.		
$5^3 =$		125		
	7	625		
	1	548	512	
$3 \times 25^2 =$		(187	5)	
$3 \times 25^2 \times 8 =$	1	500	0	
$3 \times 25 \times 8^2 =$		48	00	
$8^3 =$			512	
	1	548	512	

$$\sqrt[3]{5,8} = 1,7967 \dots$$

1		
4	800	
	(3)	
2	1	
1	47	
	343	
2	913	
	887	000
	(86	7)
	780	3
	41	31
		729
	822	339
	64	661
	(9	612
		000
		3)

Logarithmenrechnung.

I. $\log. (a \cdot b) = \log. a + \log. b.$

Regel: Der Logarithmus eines Produktes ist gleich der Summe aus den Logarithmen der Faktoren.

$$\begin{aligned} \text{Z. B.: } \log. (453 \times 2,9734) &= \log. 453 + \log. 2,9734 \\ &= \left\{ \begin{array}{l} 2,65610 \\ 0,47325 \end{array} \right\} \\ &\quad \underline{\hspace{1.5cm}} \\ &\quad 3,12935 \end{aligned}$$

daher: $453 \times 2,9734 = \text{num. } 3,12935 = 1346,95.$

$$\text{II.} \quad \log. \left(\frac{a}{b} \right) = \log. a - \log. b.$$

Regel: Der Logarithmus eines Bruches oder Quotienten ist gleich der Differenz von den Logarithmen des Zählers und Nenners oder des Dividenden und Divisors.

$$\begin{aligned} \text{Z. B.: } 1) \log. \left(\frac{85,79}{0,1648} \right) &= \log. 85,79 - \log. 0,1648 \\ &= \left\{ \begin{array}{l} 1,93344 \\ - 0,21696 - 1 \end{array} \right\} \\ &= \frac{2,71648}{2,71648}, \end{aligned}$$

daher: $\frac{85,79}{0,1648} = \text{num. } 2,71648 = 520,57.$

$$\begin{aligned} 2) \log. \left(\frac{0,0874 \times 2945}{0,003642} \right) &= \log. 0,0874 + \log. 2945 \\ &\quad - \log. 0,003642 \\ \log. 0,0874 &= 0,94151 - 2 \\ \log. 2945 &= 3,46909 \\ &\quad \underline{2,41060} \\ \log. 0,003642 &= 0,56134 - 3 \\ \frac{0,0874 \times 2945}{0,003642} &= \text{num. } 4,84926 = 70674. \end{aligned}$$

$$\text{III.} \quad \log. (a^m) = m \log. a.$$

Regel: Der Logarithmus einer Potenz ist gleich dem Produkte aus dem Exponenten und dem Logarithmus der Grundzahl.

Beispiele:

$$\begin{aligned} 1) \log. (1,765^3) &= 3 \times \log. 1,765 = 3 \times 0,24674 \\ &= 0,74022 \end{aligned}$$

$$1,765^3 = \text{num. } 0,74022 = 5,4982.$$

$$2) \log. \sqrt[3]{43,59} = \log. 43,59^{1/3} = \frac{\log. 43,59}{3} \\ = 1,63939 : 3 = 0,54646$$

$$\sqrt[3]{43,59} = \text{num. } 0,54646 = 3,5193.$$

$$3) \log. \sqrt[5]{0,037^3} = \log. (0,037^{3/5}) = \frac{3}{5} \times \log. 0,037 \\ = \frac{3}{5} \times \frac{0,56820 - 2}{0,70460 - 5} \\ = \frac{0,14092 - 1}{0,14092 - 1} \\ \sqrt[5]{0,037^3} = 0,13833 \dots$$

Gleichungen.

• Wenn $x \pm a = b$, so ist auch $x = b \mp a$.

Wenn $\frac{x}{a} = b$, so ist auch $x = a b$.

Wenn $\sqrt[m]{x} = b$, so ist auch $x = b^m$.

Wenn $x^m = b$, so ist auch $x = \sqrt[m]{b}$.

Wenn $a^x = b$, so ist auch $x \log. a = \log. b$.

Ist $a : b = c : d$, so ist auch $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$,

$$a d = b c,$$

$$a = \frac{b c}{d}.$$

$$\text{I. } \sin. \varphi^4 - r^2 \sin. \varphi^2 - \frac{1}{4} r^2 \cdot \sin. 2 \varphi^2 = 0,$$

$$\sin. 2 \varphi = \frac{2 \sqrt{b}}{a},$$

$$r^2 = a,$$

$$x = a \sin. \varphi^2,$$

$$= a \cos \varphi^2.$$

$$\text{II. } x^2 + a x - b = 0.$$

$$\text{tang. } \varphi^2 + \frac{2 r^2}{\text{Tg } 2 \varphi} \text{tang. } \varphi - r^2 = 0,$$

$$\text{tang. } 2 \varphi = \frac{2 \sqrt{b}}{a},$$

$$r^2 = b,$$

$$x = \sqrt{b} \cdot \text{tang. } \varphi.$$

$$= \sqrt{b} \cdot -\cot \varphi.$$

Setzt man in die Gleichung $x^2 - a x - b = 0$ wie vorher $x = \sqrt{b} \text{ tang. } \varphi$, so muss x negativ oder, wenn $x = -\cot \varphi \sqrt{b}$ ist, positiv genommen werden.

Wenn:

$$x y = p$$

und

$$x + y = s,$$

so ist:

$$x = \frac{s + \sqrt{s^2 - 4 p}}{2},$$

$$y = \frac{s - \sqrt{s^2 - 4 p}}{2}.$$

Cubische Gleichungen.

Die Gleichung:

$$x^3 + a x^2 + b x + c = 0,$$

geht über in:

$$x_1^3 + b_1 x_1 + c_1 = 0, \quad \bullet$$

wenn man setzt:

$$x_1 = x - \frac{a}{3},$$

$$b_1 = b - \frac{a^2}{3},$$

$$c_1 = c - \frac{a b}{3} + \frac{2}{27} a^3.$$

Alsdann ist:

$$x_1 = \sqrt[3]{-\frac{c_1}{2} + \sqrt{\left(\frac{b_1}{3}\right)^3 + \left(\frac{c_1}{2}\right)^2}} + \sqrt[3]{-\frac{c_1}{2} - \sqrt{\left(\frac{b_1}{3}\right)^3 + \left(\frac{c_1}{2}\right)^2}}.$$

Die vorstehende (Cardanische) Formel führt auf ein reelles Resultat, entweder wenn b positiv, oder wenn b negativ und zugleich

$$\left(\frac{b_1}{3}\right)^3 < \left(\frac{c_1}{2}\right)^2 \text{ ist.}$$

Trigonometrische Auflösung der cubischen Gleichung.

$$x^3 + b x + c = 0,$$

$$y = \sqrt{-\frac{4}{3} b},$$

$$\sin. 3 \varphi = \frac{c}{2} \left(-\frac{3}{b}\right)^{3/2},$$

$$x = y \sin. \varphi,$$

$$= y \sin. (60 - \varphi).$$

$$= -y \sin. (60 + \varphi).$$

Die Formel ist nur anwendbar, wenn b negativ und:

$$\left(\frac{b}{3}\right)^3 > \left(\frac{c}{2}\right)^2 \text{ ist.}$$

Auflösung höherer Gleichung durch Näherung.

Ist x_1 ein Näherungswerth von

$$x^2 + a x + b = 0,$$

so folgt:

$$x = \frac{x_1^2 - b}{2 x_1 + a}.$$

Ist x_1 ein Näherungswerth von:

$$x^3 + a x^2 + b x + c = 0,$$

so ist:

$$x = \frac{2 x_1^3 + a x_1^2 - c}{3 x_1^2 + 2 a x_1 + b}.$$

Ist x_1 ein Näherungswerth von:

$$x^4 + a x^3 + b x^2 + c x + d = 0,$$

so ist:

$$x = \frac{3 x_1^4 + 2 a x_1^3 + b x_1^2 - d}{4 x_1^3 + 3 a x_1^2 + 2 b x_1 + c},$$

Ist x_1 ein Näherungswerth von:

$$x^5 + a x^4 + b x^3 + c x^2 + d x + e = 0,$$

so ist:

$$x = \frac{4 x_1^5 + 3 a x_1^4 + 2 b x_1^3 + c x_1^2 - e}{5 x_1^4 + 4 a x_1^3 + 3 b x_1^2 + 2 c x_1 + d}.$$

Gibt die numerische Gleichung

$$X = 0$$

für den Näherungswerth x_1 das kleine Resultat X_1 und für den Näherungswerth x_2 das kleine Resultat X_2 , so ist:

$$x = \frac{x_1 X_2 - x_2 X_1}{X_2 - X_1}.$$

Methode der kleinsten Quadrate.

Hat man für ein und dieselbe Grösse x die mit unbekannten kleinen Fehlern behafteten Werthe:

$$x_1 \ x_2 \ x_3 \ \dots \ x_n,$$

so ist:

$$x = \frac{x_1 + x_2 + x_3 + \dots + x_n}{n}.$$

Hat man für die der Formel:

$$y = \alpha u + \beta v$$

entsprechenden veränderlichen Grössen $u \ v \ y$ die zusammengehörigen mit kleinen Fehlern behafteten Werthe:

$$y_1 \ u_1 \ v_1,$$

$$y_2 \ u_2 \ v_2,$$

$$y_3 \ u_3 \ v_3,$$

$$\cdot \quad \cdot \quad \cdot$$

$$\cdot \quad \cdot \quad \cdot$$

$$\cdot \quad \cdot \quad \cdot$$

$$y_n \ u_n \ v_n$$

gefunden, so sind die wahrscheinlichen Werthe der constanten Faktoren (α und β) folgende:

$$\alpha = \frac{\sum v^2 \sum u y - \sum u v \sum v y}{\sum u^2 \sum v^2 - \sum u v \sum u v},$$

$$\beta = \frac{\sum u^2 \sum v y - \sum u v \sum u y}{\sum u^2 \sum v^2 - \sum u v \sum u v}.$$

Sind für die Formel:

$$y = \alpha u + \beta v + \gamma w$$

die nur mit kleinen Fehlern behafteten Werthe:

$$y_1 \ u_1 \ v_1 \ w_1,$$

$$y_2 \ u_2 \ v_2 \ w_2,$$

$$y_3 \ u_3 \ v_3 \ w_3 \text{ u. s. w.}$$

bekannt, so lassen sich die richtigen Werthe der Koeffizienten $\alpha \beta \gamma$ durch folgende Gleichungen bestimmen:

$$\begin{aligned}\alpha \sum u^2 + \beta \sum u v + \gamma \sum u \omega &= \sum u y, \\ \beta \sum v^2 + \alpha \sum u v + \gamma \sum v \omega &= \sum v y, \\ \gamma \sum \omega^2 + \alpha \sum u \omega + \beta \sum v \omega &= \sum \omega y.\end{aligned}$$

Reihen.

$$\begin{aligned}(a \pm x)^2 &= a^2 \pm 2 a x + x^2, \\ (a \pm x)^3 &= a^3 \pm 3 a^2 x + 3 a x^2 \pm x^3, \\ (a \pm x)^4 &= a^4 \pm 4 a^3 x + 6 a^2 x^2 \pm 4 a x^3 + x^4, \\ (a \pm x)^5 &= a^5 \pm 5 a^4 x + 10 a^3 x^2 \pm 10 a^2 x^3 + 5 a x^4 \pm x^5, \\ (a \pm x)^6 &= a^6 \pm 6 a^5 x + 15 a^4 x^2 \pm 20 a^3 x^3 + 15 a^2 x^4 \\ &\quad \pm 6 a x^5 + x^6, \\ (a \pm x)^7 &= a^7 \pm 7 a^6 x + 21 a^5 x^2 \pm 35 a^4 x^3 + 35 a^3 x^4 \\ &\quad \pm 21 a^2 x^5 + 7 a x^6 \pm x^7.\end{aligned}$$

Binomische Reihe.

$$\begin{aligned}(a \pm x)^n &= a^n \pm n a^{n-1} x + \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2} a^{n-2} x^2 \pm \\ &\quad \frac{n(n-1)(n-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} a^{n-3} x^3 + \dots, \\ (a + x)^n &= a^n \left[1 + n \left(\frac{x}{a} \right) + \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2} \left(\frac{x}{a} \right)^2 + \right. \\ &\quad \left. \frac{n(n-1)(n-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} \left(\frac{x}{a} \right)^3 + \dots \right],\end{aligned}$$

$$(a+x)^n = a^n \left[1 + n \left(\frac{x}{a+x} \right) + \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2} \left(\frac{x}{a+x} \right)^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} \left(\frac{x}{a+x} \right)^3 + \dots \right],$$

$$\sqrt{a+x} = (a+x)^{1/2} = \sqrt{a} \left[1 + \frac{1}{2} \left(\frac{x}{a} \right) - \frac{1}{8} \left(\frac{x}{a} \right)^2 + \frac{1}{16} \left(\frac{x}{a} \right)^3 - \frac{5}{128} \left(\frac{x}{a} \right)^4 + \frac{7}{256} \left(\frac{x}{a} \right)^5 - \dots \right];$$

$$\sqrt[3]{a+x} = (a+x)^{1/3} = \sqrt[3]{a} \left[1 + \frac{1}{3} \left(\frac{x}{a} \right) - \frac{1}{9} \left(\frac{x}{a} \right)^2 + \frac{5}{81} \left(\frac{x}{a} \right)^3 - \frac{10}{243} \left(\frac{x}{a} \right)^4 + \frac{22}{729} \left(\frac{x}{a} \right)^5 - \dots \right].$$

Exponentialreihe.

$$a^x = (1+z)^x = 1 + Ax + \frac{A^2}{1 \cdot 2} x^2 + \frac{A^3}{1 \cdot 2 \cdot 3} x^3 + \frac{A^4}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} x^4 \dots,$$

Darin ist:

$$A = z - \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{3} - \frac{z^4}{4} \dots$$

Setzt man $A=1$ und $x=1$, so ergibt sich die Basis des natürlichen Logarithmensystems:

$$e = 1 + 1 + \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} \dots = 2,718281828459.$$

Alsdann ist:

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{1 \cdot 2} + \frac{x^3}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \frac{x^4}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} \dots$$

und wenn $(\ln:a)$ den natürlichen Logarithmus von a bezeichnet:

$$a^x = 1 + \frac{(\ln : a)}{1} x + \frac{(\ln : a)^2}{1 \cdot 2} x^2 + \frac{(\ln : a)^3}{1 \cdot 2 \cdot 3} x^3 + \dots,$$

$$\ln : (x + 1) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \frac{x^5}{5} - \dots,$$

$$\ln : (x + 1) - \ln : x = \frac{1}{x} - \frac{1}{2x^2} + \frac{1}{3x^3} - \frac{1}{4x^4} + \dots,$$

$$\ln : (x + 1) - \ln : (x - 1) = 2 \left[\frac{1}{x} + \frac{1}{3x^3} + \frac{1}{5x^5} \dots \right],$$

$$\ln : x = 2 \left[\frac{x-1}{x+1} + \frac{1}{3} \left(\frac{x-1}{x+1} \right)^3 + \frac{1}{5} \left(\frac{x-1}{x+1} \right)^5 + \dots \right],$$

$$\ln : (x + y) - \ln : x = 2 \left[\frac{y}{2x + y} + \frac{1}{3} \left(\frac{y}{2x + y} \right)^3 + \frac{1}{5} \left(\frac{y}{2x + y} \right)^5 \dots \right].$$

$$\log. a x = \ln : x \frac{1}{\ln : a}.$$

wenn a die Basis des künstlichen Logarithmensystems ist.

$$\frac{1}{\ln : a} \text{ ist der Modul } M.$$

Für das Briggische System ist:

$$M = 0,4342944819$$

und:

$$\ln : 10 = 2,302585.$$

Goniometrische und cyclometrische Reihen.

$$\sin. x = x - \frac{x^3}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \frac{x^5}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} - \frac{x^7}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7} + \dots,$$

$$\cos. x = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} - \frac{x^6}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6} + \dots,$$

$$\text{tang. } x = x + \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{3 \cdot 5} + \frac{17x^7}{3^2 \cdot 5 \cdot 7} + \frac{62x^9}{3^2 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 9} \dots,$$

$$\text{cot. } x = \frac{1}{x} - \frac{x}{3} - \frac{x^3}{3^2 \cdot 5} - \frac{2x^5}{3^2 \cdot 5 \cdot 7} \dots,$$

$$\text{arc. sin. } x = x + \frac{x^3}{2 \cdot 3} + \frac{3x^5}{2 \cdot 4 \cdot 5} + \frac{3 \cdot 5 \cdot x^7}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 7} \dots,$$

$$\text{arc. cos. } x = \frac{\pi}{2} - x - \frac{x^3}{2 \cdot 3} - \frac{3x^5}{2 \cdot 4 \cdot 5} - \frac{3 \cdot 5 \cdot x^7}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 7} \dots,$$

$$\text{arc. tang. } x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \dots,$$

$$\text{arc. cot. } x = \frac{\pi}{2} - x + \frac{x^3}{3} - \frac{x^5}{5} + \frac{x^7}{7} \dots$$

Relationen zwischen Exponential- und trigonometrischen Funktionen.

$$\sqrt{-1} = i.$$

$$\cos. x \pm i \sin. x = e^{\pm xi},$$

$$\begin{aligned} (\cos. x \pm i \sin. x)^m &= \cos. m x \pm i \sin. m x, \\ &= e^{\pm mxi} \text{ (Moivresche Formel),} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (\cos. x + i \sin. x) (\cos. y + i \sin. y), \\ = \cos. (x + y) + i \sin. (x + y), \end{aligned}$$

$$\cos. x = \frac{1}{2} (e^{xi} + e^{-xi}),$$

$$\sin. x = \frac{1}{2i} \left(\frac{e^{xi} - e^{-xi}}{i} \right),$$

$$x = \frac{1}{2i} \ln \frac{1 + i \text{tang. } x}{1 - i \text{tang. } x}.$$

Geometrische Progression.

Bedeutet t das n^{te} Glied und s die Summe aller Glieder bis dahin, so ist, wenn:

$$a, a b, a b^2, a b^3 \dots a b^{n-1}$$

die Reihe ist:

$$t = a b^{n-1},$$

$$s = a \left(\frac{b^n - 1}{b - 1} \right),$$

$$s = \frac{b t - a}{b - 1},$$

$$s = \frac{t (b^n - 1)}{b^n - 1 (b - 1)} = \frac{\sqrt[n]{t^n} - \sqrt[n]{a^n}}{\sqrt[n]{t} - \sqrt[n]{a}}.$$

Ist b ein echter Bruch und $n \infty$ gross, so ist $t = 0$ und

$$s = \frac{a}{1 - b}$$

Zinsrechnung.

Es bedeute k das anfängliche Kapital,
 a Prozent, die Zinsen pro Jahr,
 so ist nach n Jahren der Werth W des Kapitals:

$$W = \left(1 + \frac{a}{100} \right)^n k,$$

auch ist:

$$k = \frac{W}{\left(1 + \frac{a}{100} \right)^n}.$$

Ferner ist:

$$a = 100 \left(\sqrt[n]{\frac{W}{k}} - 1 \right),$$

$$n = \frac{\log. W - \log. k}{\log. \left(1 + \frac{a}{100} \right)}.$$

Rentenrechnung.

Wenn K am Ende jeden Jahres um die stets gleichbleibende Summe S vermehrt oder vermindert wird, so ist der Werth desselben nach n Jahren:

$$W = \left(1 + \frac{a}{100} \right)^n k \pm \left[\left(1 + \frac{a}{100} \right)^n - 1 \right] \frac{100}{a} S.$$

W ist kleiner als K, wenn:

$$-S > \frac{a}{100} k,$$

W ist = Null, wenn:

$$\frac{S}{K} = \frac{a}{100} \cdot \frac{\left(1 + \frac{a}{100} \right)^n}{\left(1 + \frac{a}{100} \right)^n - 1}$$

ist. In diesem Falle ist:

$$n = \frac{\log. S - \log. \left(S - \frac{a}{100} K \right)}{\log. \left(1 + \frac{a}{100} \right)}.$$

Arithmetische Progression.

t bedeute das n^{te} Glied, s die Summe, so ist, wenn:

$$\begin{array}{ccccccc} a, & a + d, & a + 2d, & a + 3d & \dots & a + (n-1)d \\ 1 & 2 & 3 & 4 & & n \end{array}$$

die Reihe ist:

$$t = a + (n-1)d; \quad s = \frac{a+t}{2} \cdot n.$$

Auch hat man:

$$\begin{aligned} s &= \left(a + \frac{(n-1)d}{2} \right) n = \left(t - \frac{(n-1)d}{2} \right) n \\ &= \frac{a+t}{2} \cdot \left(\frac{t-a}{d} + 1 \right). \end{aligned}$$

Höhere arithmetische Reihe.

Ist:

$$a_1, a_2, a_3, a_4 \dots a_n$$

eine höhere arithmetische Reihe:

$$\begin{aligned} b_1, b_2, b_3, b_4 \dots b_n &\text{ ihre erste,} \\ c_1, c_2, c_3, c_4 \dots c_n &\text{ ihre zweite,} \\ d_1, d_2, d_3, d_4 \dots d_n &\text{ ihre dritte} \end{aligned}$$

Differenzreihe, ist also:

$b_1 = a_2 - a_1, b_2 = a_3 - a_2, c_1 = b_2 - b_1, d_1 = c_2 - c_1$
u. s. w., so hat man das allgemeine Glied der Hauptreihe

$$\begin{aligned} \text{I.} \quad a_n &= a_1 + (n-1)b_1 + \frac{(n-1)(n-2)}{1 \cdot 2} c_1 \\ &\quad + \frac{(n-1)(n-2)(n-3)}{1 \cdot 2 \cdot 3} d_1 + \dots, \end{aligned}$$

dagegen die Summe aller Glieder der Hauptreihe bis zum n^{ten} oder allgemeinen Gliede, das sogenannte summatorische Glied:

$$\text{II. } S_n = n a_1 + \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2} b_1 + \frac{n(n-1)(n-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} c_1 + \dots$$

Bei einer arithmetischen Reihe der zweiten Ordnung ist:

$$c_1 = c_2 = c_3 = \dots,$$

also:

$$d_1 = 0 \text{ u. s. w.},$$

daher ist für sie:

$$a_n = a_1 + (n-1) b_1 + \frac{1}{2} (n-1)(n-2) c_1,$$

$$S_n = n a_1 + \frac{1}{2} n(n-1) b_1 + \frac{1}{6} n(n-1)(n-2) c_1.$$

Die Reihen der sogenannten Polygonalzahlen sind
Zahlen des Dreieckes: 1, 3, 6, 10, 15 . . . ,

„ Viereckes: 1, 4, 9, 16, 25 . . . ,

„ Fünfeckes: 1, 5, 12, 22, 35 u. s. w.

Es ist demnach das allgemeine Glied der Dreieckszahlen :

$$a_n = 1 + 2(n-1) + \frac{1}{2} (n-1)(n-2) = \frac{n(n+1)}{2},$$

und das summatorische Glied:

$$S_n = n + n(n-1) + \frac{1}{6} n(n-1)(n-2) = \frac{n(n+1)(n+2)}{1 \cdot 2 \cdot 3}.$$

Für die Viereckszahlen ist:

$$a_1 = 1, b_1 = 4 - 1 = 3$$

und:

$$c_1 = 5 - 3 = 2,$$

daher: $a_n = 1 + 3(n-1) + (n-1)(n-2) = n^2,$

$$\begin{aligned} S_n &= n + \frac{3}{2} n(n-1) + \frac{1}{3} n(n-1)(n-2) \\ &= \frac{n(n+1)(2n+1)}{1 \cdot 2 \cdot 3}. \end{aligned}$$

spiel. Die höhere arithmetische Reihe

$$2, 10, 30, 68, 130, 222 \dots$$

und Differenzreihen:

$$8, 20, 38, 62, 92$$

$$12, 18, 24, 30$$

$$6, 6, 6$$

$$0, 0$$

$$0$$

sie ist daher:

$$a_1 = 2, b_1 = 8, c_1 = 12, d_1 = 6, e_1 = 0;$$

das allgemeine Glied:

$$+ 8(n-1) + \frac{12}{2}(n-1)(n-2) + \frac{6}{6}(n-1)(n-2)(n-3) + 0 \dots,$$

$$+ 8n - 8 + 6n^2 - 18n + 12 + n^3 - 6n^2 + 11n - 6 = n + n^3 = n(n^2 + 1),$$

das n-te Glied:

$$2n + 4n(n-1) + 2n(n-1)(n-2) + \frac{1}{4}n(n-1)(n-2)(n-3) = \frac{1}{4}n(2 + 3n + 2n^2 + n^3) = \frac{1}{4}n(n+1)(n^2 + n + 2).$$

In diesen Formeln ist z. B. das zehnte Glied der Reihe:

$$a_{10} = 10(10^3 + 1) = 10 \times 101 = 1010,$$

Summe der ersten zehn Glieder:

$$1 \times 10 \times 11(100 + 10 + 2) = 55 \times 56 = 3080.$$

Potenzreihen.

Setzt $\Sigma(n)$ die Summe der natürlichen Zahlen $1 \dots n$ von 1 bis n , ferner $\Sigma(n^2)$ die Summe

($1^2, 2^2, 3^2, 4^2 \dots n^2$) ihrer Quadrate, $\Sigma(n^2)$ die Summe ($1^3, 2^3, 3^3, 4^3 \dots n^3$) ihrer Cuben u. s. w., so hat man:

- I. $\Sigma(n) = \frac{1}{2} n^2 + \frac{1}{2} n,$
 II. $\Sigma(n^2) = \frac{1}{3} n^3 + \frac{1}{2} n^2 + \frac{1}{6} n,$
 III. $\Sigma(n^3) = \frac{1}{4} n^4 + \frac{1}{2} n^3 + \frac{1}{4} n^2,$
 IV. $\Sigma(n^4) = \frac{1}{5} n^5 + \frac{1}{2} n^4 + \frac{1}{3} n^3 - \frac{1}{30} n,$
 V. $\Sigma(n^5) = \frac{1}{6} n^6 + \frac{1}{2} n^5 + \frac{5}{12} n^4 - \frac{1}{12} n^2,$
 VI. $\Sigma(n^6) = \frac{1}{7} n^7 + \frac{1}{2} n^6 + \frac{1}{2} n^5 - \frac{1}{6} n^3 + \frac{1}{42} n.$

Ist n eine unendliche oder sehr grosse Zahl, so hat man allgemein:

$$\text{VII.} \quad \Sigma(n^m) = \frac{n^{m+1}}{m+1}.$$

Daher:

$$\begin{aligned} \Sigma n &= \frac{1}{2} n^2, \\ \Sigma n^2 &= \frac{1}{3} n^3, \\ \Sigma n^3 &= \frac{1}{4} n^4, \\ \Sigma n^4 &= \frac{1}{5} n^5, \\ &\dots \dots \dots \\ &\dots \dots \dots \\ \Sigma n^{1/2} &= \frac{2}{3} n^{3/2}, \\ \Sigma n^{3/2} &= \frac{2}{5} n^{5/2}, \\ \Sigma n^{2/3} &= \frac{3}{5} n^{5/3}, \end{aligned}$$

Die Reihe:

$$a_n = a_0 + (n-1) b_0 + \frac{1}{2} (n-1) (n-2) e_0 + \dots$$

dient auch zum Einschalten eines Gliedes a_n einer gegebenen Reihe:

$$a_1, a_2, a_3, a_4 \dots,$$

deren Differenz-Reihen:

$$\begin{aligned} &b_1, b_2, b_3, b_4 \dots \text{ und} \\ &c_1, c_2, c_3, c_4 \text{ sind.} \end{aligned}$$

Combinations.

I. Permutationen von n Element $= 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \dots n$.

Ist ein Element g mal, das andere r mal wiederholt, so sind:

$$\frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \dots n}{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots g \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \dots r}$$

Permutationsformen.

II. Anzahl der Variationen für n Elemente zu k^{ter} Klasse:

$$v^k = n \cdot n - 1 \cdot n - 2 \cdot n - 3 \cdot n - k + 1.$$

Bei unbedingter Wiederholbarkeit der Elemente ist:

$$v^k = n^k.$$

III. Anzahl der Combinations von n Elementen zu k^{ter} Klasse:

$$c^k = \frac{v^k}{k} = \frac{n \cdot n - 1 \cdot n - 2 \cdot n - 3 \dots n - k + 1}{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots k},$$

bei unbedingter Wiederholung der Elemente:

$$c^k = \frac{n \cdot n + 1 \cdot n + 2 \cdot n + 3 \dots n + k - 1}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \dots k}.$$

Dieses ist zugleich der Ausdruck der figurirten Zahlen des k^{ten} Gliedes der k^{ten} Klasse.

IV. Sollen n Elemente in zwei Abtheilungen a und b zerlegt werden, (auf jede mögliche Weise), deren eine k , die andere $n - k = r$ Elemente enthält, so ist die Anzahl der Zerlegungen für:

$$a = \frac{n \cdot n - 1 \cdot n - 2 \dots n + k - 1}{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots k},$$

für:

$$b = \frac{n \cdot n - 1 \cdot n - 2 \cdot n + r - 1}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot r}.$$

Für drei Abtheilungen, von denen a , k Elemente, b , r , c , s Elemente enthalten soll, ist:

$${}^k C_n \times {}^r C_{n-k} = {}^k C_n \times {}^s C_{n-k} = {}^r C_n \times {}^k C_{n-r} \text{ u. s. w.}$$

Cyclische Funktionen.

Es ist:

$$(1+z)^x = 1 + Ax + \frac{A^2}{1 \cdot 2} x^2 + \frac{A^3}{1 \cdot 2 \cdot 3} x^3 \\ + \frac{A^4}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} x^4,$$

$$A = z - \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{3} - \frac{z^4}{4} \dots,$$

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{1 \cdot 2} + \frac{x^3}{1 \cdot 2 \cdot 3} \dots$$

x sei $= \log. y$, so ist, wenn a die Basis des Systems bedeutet, $a^x = y$ und:

$$(1 + a - 1)^{nx} = [1 + (y - 1)],$$

nach dem binomischen Lehrsatz entwickelt, gibt dieses:

$$1 + nx(a - 1) + \frac{nx(nx - 1)}{1 \cdot 2} (a - 1)^2 \\ + \frac{nx \cdot (nx - 1)(nx - 2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} (a - 1)^3 \dots,$$

$$= 1 + n(y - 1) + \frac{n \cdot n - 1}{1 \cdot 2} (y - 1)^2 + \frac{n \cdot n - 1 \cdot n - 2}{1 \cdot 2 \cdot 3} \\ (y - 1)^3 \dots,$$

auf beiden Seiten 1 subtrahirt und mit n dividirt, gibt:

$$x(a-1) + \frac{x(nx-1)}{1 \cdot 2} (a-1)^2 + \frac{x(nx-1)(nx-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} (a-1)^3 \dots,$$

$$= (y-1) + \frac{n-1}{1 \cdot 2} (y-1)^2 + \frac{n-1 \cdot n-2}{1 \cdot 2 \cdot 3} (y-1)^3.$$

$n=0$ gesetzt, gibt

$$x[(a-1) - \frac{1}{2}(a-1)^2 + \frac{1}{3}(a-1)^3 - \frac{1}{4}(a-1)^4 \dots]$$

$$= Ax = (y-1) - \frac{1}{2}(y-1)^2 + \frac{1}{3}(y-1)^3 - \frac{1}{4}(y-1)^4.$$

$$x = \frac{1}{A} [(y-1) - \frac{1}{2}(y-1)^2 + \frac{1}{3}(y-1)^3 - \frac{1}{4}(y-1)^4]$$

$$= \log. y,$$

$$\log. (1+y) = \frac{1}{A} (y - \frac{1}{2}y^2 + \frac{1}{3}y^3 - \frac{1}{4}y^4 \dots)$$

$$\text{für } A=1 \log. \text{ nat. } (1+y) = y - \frac{1}{2}y^2 + \frac{1}{3}y^3 - \frac{1}{4}y^4.$$

Setzt man statt e^x :

$$e^{x \cdot i} = e^x \cdot \sqrt{-1},$$

so entsteht durch Sonderung der imaginären Glieder:

$$e^{x \cdot i} = 1 - \frac{x^2}{1 \cdot 2} + \frac{x^4}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} - \frac{x^6}{1 \cdot \dots \cdot 6} \dots$$

$$+ \left(x - \frac{x^3}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \frac{x^5}{1 \cdot \dots \cdot 5} - \frac{x^7}{1 \cdot \dots \cdot 7} \right) \cdot i$$

$$\text{I. } e^{x \cdot i} = \cos. x + \sin. x \cdot i,$$

$$\text{II. } e^{-x \cdot i} = \cos. x - \sin. (x) i,$$

und wenn man $x = n \cdot z$ setzt:

$$e^{(nz)i} = \cos. n \cdot z + \sin. (nz) \cdot i,$$

$$e^{n(z \cdot i)} = (\cos. z + \sin. z \cdot i)^n,$$

also:

$$\text{III. } (\cos. z + \sin. z \cdot i)^n = \cos. n z + \sin. (n z) \cdot i,$$

durch Addition und Subtraktion von I und II entsteht:

$$\text{IV.} \quad \cos. x = \frac{e^{xi} + e^{-xi}}{2},$$

$$\text{V.} \quad \sin. x = \frac{e^{x \cdot i} - e^{-x \cdot i}}{2i}.$$

Durch Multiplikation von I und II:

$$\text{VI.} \quad 1 = \cos. x^2 + \sin. x^2.$$

Um den Werth von x in Funktion seines $\sin.$ oder $\cos.$ auszudrücken:

($\text{arc. } x = \text{Funktion } \sin. x$),

ist aus I und II:

$$x \cdot i = \log. \text{ nat. } (\cos. x + \sin. x \cdot i),$$

$$-x \cdot i = \log. \text{ nat. } (\cos. x - \sin. x \cdot i).$$

Hieraus durch Subtraktion, wenn $\log. \text{ nat.}$ kurz durch $\log.$ bezeichnet wird:

$$\text{VII.} \quad x = \frac{1}{2i} \log. \left(\frac{\cos. x + \sin. x \cdot i}{\cos. x - \sin. x \cdot i} \right),$$

mit $\cos. x$ den Bruch gehoben, gibt:

$$\text{VIII.} \quad x = \frac{1}{2i} \log. \left(\frac{1 + \text{tang. } x \cdot i}{1 - \text{tang. } x \cdot i} \right).$$

Da nun:

$$\log. \frac{1+z}{1-z} = 2 \left(z + \frac{z^3}{3} + \frac{z^5}{5} + \frac{z^7}{7} \dots \right),$$

so ist, wenn man VIII hiernach entwickelt:

$$\text{IX.} \quad x = \frac{1}{2i} \cdot 2i \left(\text{tang. } x - \frac{\text{tang. } x^3}{3} + \frac{\text{tang. } x^5}{5} - \dots \right).$$

Wird hierin $\text{tang. } x = 1$ gesetzt, so ist:

$$\text{X.} \quad \frac{1}{4} \pi = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} \dots$$

Leibnitz'sche Reihe. Andere besser convergirende Reihen für π sind:

$$\text{tang. } 30^\circ = \frac{\pi}{6}, \text{ ist gleich } \frac{1}{3} \sqrt{3},$$

also nach gehöriger Operation:

$$\text{XI.} \quad \frac{\pi}{6} = \frac{1}{3} \sqrt{3} \left(1 - \frac{1}{3 \cdot 3} + \frac{1}{5 \cdot 3^2} - \frac{1}{7 \cdot 3^3} + \frac{1}{9 \cdot 3^4} \right).$$

$$\text{XII.} \quad \pi = 2 \sqrt{3} \left(1 - \frac{1}{3 \cdot 3} \dots \right).$$

Zur Vermeidung der $\sqrt{\quad}$ Grösse kann man $\frac{\pi}{4}$ in zwei Bogen zerlegen, deren tang. rational.

$$\text{Es ist:} \quad \text{tang. } \alpha + \beta = \frac{\text{tang. } \alpha \cdot \text{tang. } \beta}{1 - \text{tang. } \alpha \cdot \text{tang. } \beta};$$

setzt man:

$$\text{tang. } \alpha = \frac{1}{2},$$

$$\text{tang. } \beta = \frac{1}{3},$$

so ist:

$$\text{tang. } \alpha + \beta = \frac{\frac{1}{2} + \frac{1}{3}}{1 - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3}} = 1,$$

also:

$$\alpha + \beta = \frac{1}{4} \pi.$$

Nach IX kann man setzen:

$$x = \text{tang. } x \left(1 - \frac{1}{3} \text{ tang. } x^2 + \frac{1}{5} \text{ tang. } x^4 - \dots \right).$$

Also:

$$\alpha = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{3 \cdot 2^2} + \frac{1}{5 \cdot 2^4} - \frac{1}{7 \cdot 2^6} + \frac{1}{9 \cdot 2^8} - \dots \right),$$

$$\beta = \frac{1}{3} \left(1 - \frac{1}{3 \cdot 3^2} + \frac{1}{5 \cdot 3^4} - \frac{1}{7 \cdot 3^6} + \frac{1}{9 \cdot 3^8} - \dots \right),$$

also:

$$\alpha + \beta = \frac{1}{4} \pi \text{ und}$$

XIII.

$$\pi = 2 \left(1 - \frac{1}{3 \cdot 2^2} + \frac{1}{5 \cdot 2^4} - \frac{1}{7 \cdot 2^6} + \frac{1}{9 \cdot 2^8} \cdots \right),$$

$$+ \frac{4}{3} \left(1 - \frac{1}{3 \cdot 3^2} + \frac{1}{5 \cdot 3^4} - \frac{1}{7 \cdot 3^6} + \frac{1}{9 \cdot 3^8} \cdots \right).$$

(Euler'sche Entwicklung.)

Machin'sche Entwicklung.

Derselbe setzt:

$$\frac{1}{4} \pi = 4 \alpha - \beta \text{ wobei } \text{tang. } \alpha = \frac{1}{5}, \text{ tang. } \beta = \frac{1}{239} \text{ ist.}$$

$$\text{tang. } 2 \alpha = \frac{2 \text{ tang. } \alpha}{1 - \text{tang. } \alpha^2} = \frac{2 \cdot \frac{1}{5}}{1 - \frac{1}{25}} = \frac{5}{12}.$$

$$\text{I. } \text{tang. } 4 \alpha = \frac{2 \cdot \frac{5}{12}}{1 - \frac{25}{144}} = \frac{120}{119},$$

mithin etwas grösser als 1, folglich auch:

$$\text{tang. } 4 \alpha > \text{tang. } \frac{1}{4} \pi,$$

also:

$$4 \alpha > \frac{1}{4} \pi,$$

daher sei:

$$\frac{1}{4} \pi = 4 \alpha - \beta,$$

so hat man:

$$1 = \text{tang. } (4 \alpha - \beta) = \frac{\text{tang. } 4 \alpha - \text{tang. } \beta}{1 + \text{tang. } 4 \alpha \text{ tang. } \beta}.$$

4

taus:

$$\operatorname{tg.} \beta = \frac{\operatorname{tang.} 4\alpha - 1}{\operatorname{tang.} 4\alpha + 1} = \frac{\frac{120}{119} - 1}{\frac{120}{119} + 1} = \frac{1}{239}.$$

nn man nun α und β entwickelt, so ist:

$$\alpha = \frac{1}{5} \left(1 - \frac{1}{3 \cdot 5^2} + \frac{1}{5 \cdot 5^4} - \frac{1}{7 \cdot 5^6} + \dots \right),$$

$$\beta = \frac{1}{239} \left(1 - \frac{1}{3 \cdot 239^2} + \frac{1}{5 \cdot 239^4} - \dots \right).$$

$$: \quad \frac{1}{4} \pi = 4\alpha - \beta,$$

$$= 4 \cdot \left\{ \begin{aligned} & \frac{4}{5} \left(1 - \frac{1}{3 \cdot 5^2} + \frac{1}{5 \cdot 5^4} - \frac{1}{7 \cdot 5^6} + \dots \right), \\ & - \frac{1}{239} \left(1 - \frac{1}{3 \cdot 239^2} + \frac{1}{5 \cdot 239^4} \right. \\ & \quad \left. - \frac{1}{7 \cdot 239^6} + \dots \right), \end{aligned} \right.$$

o dasselbe ist:

$$= 4 \cdot \left\{ \begin{aligned} & \frac{4}{5} \left(1 - \frac{4}{3 \cdot 100} + \frac{4^2}{5 \cdot 100^2} \right. \\ & \quad \left. - \frac{4^3}{7 \cdot 100^3} + \dots \right), \\ & - \frac{1}{239} \left(1 - \frac{1}{3 \cdot 57121} + \frac{1}{5 \cdot 57121^2} \right. \\ & \quad \left. - \frac{1}{7 \cdot 57121^3} + \dots \right). \end{aligned} \right.$$

Vega hat bei der Berechnung:

$$\frac{1}{4} \pi = 5 \text{ arc. tang. } \frac{1}{7} + 2 \text{ arc. tang. } \frac{3}{79}$$

gesetzt. Zur Prüfung setzte er:

$$\frac{1}{4} \pi = \text{arc. tang. } \frac{1}{7} + 2 \text{ arc. tang. } \frac{1}{8}.$$

Hyberbolische Funktionen.

Zerlegt man e^x in die beiden Reihen:

$$1 + \frac{x^2}{1 \cdot 2} + \frac{x^4}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} + \frac{x^6}{1 \cdot \dots \cdot 6} + \frac{x^8}{1 \cdot \dots \cdot 8} = \cos. x,$$

$$x + \frac{x^3}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \frac{x^5}{1 \cdot \dots \cdot 5} + \frac{x^7}{1 \cdot \dots \cdot 7} + \frac{x^9}{1 \cdot \dots \cdot 9} = \sin. x,$$

so ist:

I. $e^x = \cos. x + \sin. x,$

II. $e^{-x} = \cos. x - \sin. x,$

III. $(\cos. z + \sin. z)^n = \cos. n z + \sin. n \cdot z$

durch Addition und Subtraktion von I und II

IV. $\cos. x = \frac{e^x + e^{-x}}{2},$

V. $\sin. x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$

durch Multiplikation von I und II

VI. $1 = \cos. x^2 - (\sin. x)^2.$ *Fig. 42 538*

Diese Gleichung stellt die Coordinaten-Gleichung einer gleichseitigen auf den Mittelpunkt bezogenen Hyperbel vor, daher die Benennung, ebenso wie bei den cyklischen Funktionen.

Will man den Werth von x durch einen hyperbolischen sin. oder cos. ausdrücken, so hat man durch Subtraktion von I und II

$$x = \log. (\cos. x + \sin. x)$$

$$-x = \log. (\cos. x - \sin. x)$$

VII.
$$x = \frac{1}{2} \log. \left(\frac{\cos. x + \sin. x}{\cos. x - \sin. x} \right),$$

mit $\cos. x$ gehoben:

VIII.
$$x = \frac{1}{2} \log. \left(\frac{1 + \text{tang. } x}{1 - \text{tang. } x} \right)$$

und entwickelt:

IX.
$$x = \text{tang. } x + \frac{\text{tang. } x^3}{3} + \frac{\text{tang. } x^5}{5} + \frac{\text{tang. } x^7}{7},$$

X.
$$x = \text{tang. } x \left(1 + \frac{\text{tang. } x^2}{3} + \frac{\text{tang. } x^4}{5} + \frac{\text{tang. } x^6}{7} \dots \right).$$

Methode der unbestimmten Koëffizienten,

an einigen Beispielen erläutert.

1. Beispiel. Es soll:

$$\frac{a + b x^2}{c + d x}$$

in einer Reihe nach den Potenzen von x entwickelt werden.

I.
$$\frac{a + b x^2}{c + d x} = A + B x + C x^2 + D x^3 + \dots,$$

$$a + b x^2 = c A + c B x + c C x^2 + c D x^3 \\ d A x + d B x^2 + d C x^3,$$

also:

$$0 = c A \mid + c B \mid x + c C \mid x^2 + c D \mid x^3 \\ - a \mid + d A \mid x + d B \mid x^2 + d C \mid x^3 \\ - b \mid x^2$$

Soll nun die linke Seite für einen reellen Werth von $x = \text{Null}$ werden, so müssen sämtliche Koeffizienten $= 0$ sein, daher:

$$c A - a = 0, \text{ also } A = \frac{a}{c},$$

$$d A + c B = 0, \quad „ \quad B = -\frac{a d}{c^2},$$

$$c C + d B - b = 0, \quad „ \quad C = \frac{b c^2 + a d}{c^3},$$

$$c D + d C = 0, \quad „ \quad D = -\frac{d (b c^2 + a d)}{c^4}.$$

Substituirt man diese Werthe in der Gleichung, so erhält man die verlangte Entwicklung.

2. Beispiel. y sei $f(x)$, so kann man eine Funktion von y betrachten und $x = f y$ setzen. Es sei:

$$\text{I. } y = x - \frac{x^2}{2 \cdot 3} + \frac{x^3}{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} - \frac{x^4}{1 \cdot \dots \cdot 7}$$

Man setze:

$$\text{II. } x = A + B y + C y^2 + D y^3 \dots$$

Da in I. für $x = 0$ auch $y = 0$ wird, so $A = 0$, sein; für $x = -x$ wird y auch $= -y$, die Zeichen der rechten Seite alle umkehren, so dass in der gesuchten Entwicklung nur ungerade Potenzen kommen und es fällt die gesuchte Reihe in eine einfache Form.

$$\text{III. } x = a y + b y^3 + c y^5 + d y^7 \dots$$

Substituirt man diesen Werth von x in die Gleichung I und bringt y auf die rechte Seite, wodurch die Gleichung auf 0 gebracht wird, so kommt:

$$\begin{array}{r|l}
 b & y^3 + c \\
 1 \cdot a^3 & - 1 \cdot a^2 b \\
 & + 1 \cdot 120 a^5 \\
 & y^3 + d \\
 & - 1 \cdot a^2 c \\
 & - 1 \cdot a b^2 \\
 & + 1 \cdot 24 a^4 b \\
 & - 1 \cdot 5040 a^7
 \end{array} \quad \left| \quad y^7 \right.$$

0:

$$\text{also } a = 1.$$

$$= 0, \text{ also } b = \frac{1}{2 \cdot 3}.$$

$$+ 1 \cdot 120 = 0 \text{ also } c = -\frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4 \cdot 5},$$

$$- 1 \cdot a b^2 + 1 \cdot 24 a^4 b - 1 \cdot 5040 a^7 = 0,$$

$$d = \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 7}$$

tion.

$$+ \frac{1}{2 \cdot 3} y^3 + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4 \cdot 5} y^5 + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 7} y^7 \dots$$

I war die Entwicklung von $\sin. x$, also die Entwicklung von $\arcsin. x = \sin. = y$, d. h. ng des zum $\sin. = y$ gehörigen Bogens.

el.

$$+ \frac{x^2}{1 \cdot 2} + \frac{x^3}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \frac{x^4}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} \dots$$

finden: $x = f(y)$.

Die Reihe kann nicht nach den Potenzen von y weil y nicht $= f(x)$ sondern:

$$y - 1 = f(x),$$

sondern nur gesucht werden:

$$x = f(y - 1).$$

Ist nun:

$$\text{I. } z = y - 1 = x + \frac{x^2}{1 \cdot 2} + \frac{x^3}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \frac{x^4}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} \dots,$$

so ist:

$$\text{II. } x = a z + b z^2 + c z^3 + d z^4.$$

II und I substituiert und das vorige Verfahren aus Beispiel 2 angewendet gibt:

$$\text{III. } x = z - \frac{1}{2} z^2 + \frac{1}{3} z^3 - \frac{1}{4} z^4 \dots,$$

$$\text{IV. } x = y - 1 - \frac{1}{2} (y - 1)^2 + \frac{1}{3} (y - 1)^3 - \frac{1}{4} (y - 1)^4 \dots$$

In der oben angeführten Reihe erkennt man leicht die Entwicklung von e^x , also:

$$y = e^x = f(x),$$

und da x nach III $= f z = f(e^x - 1)$,

so ist die obige Reihe als eine Entwicklung der Potenz y^1 anzusehen. Dann ist x der Modul, also:

$$-1 + y = f \text{ Modul} = f z = f(y - 1) = f x$$

und da $x = f z = f(y - 1)$.

4. Beispiel. Entwicklung von a^x :

$$a^x = (1 + a - 1)^n \cdot \frac{x}{n},$$

nach dem binomischen Lehrsatz:

$$\begin{aligned} [1 + (a - 1)]^n &= 1 + n(a - 1) + \frac{n \cdot n - 1}{1 \cdot 2} (a - 1)^2 \\ &+ \frac{n \cdot n - 1 \cdot n - 2}{1 \cdot 2 \cdot 3} (a - 1)^3 +, \end{aligned}$$

nach Potenzen von n geordnet:

$$\begin{array}{l|l|l|l}
[1 + (a-1)]^n & n + \frac{1}{2}(a-1)^2 & n^2 + \frac{1}{6}(a-1)^3 & n^3 \\
= 1 + (a-1) & - \frac{1}{2}(a-1)^3 & - \frac{1}{4}(a-1)^4 & \\
- \frac{1}{2}(a-1)^2 & + \frac{11}{24}(a-1)^4 & \text{etc.} & \\
+ \frac{1}{3}(a-1)^3 & \text{etc.} & & \\
- \frac{1}{4}(a-1)^4 & & & \\
+ \text{etc. oder:} & & & \\
[1 + (a-1)]^n & n + B & n^2 + C & n^3 \\
= 1 + A & & &
\end{array}$$

so ist:

$$A = (a-1) - \frac{1}{2}(a-1)^2 + \frac{1}{3}(a-1)^3 - \frac{1}{4}(a-1)^4 + \dots$$

Erhebt man die Gleichung:

$$[1 + (a-1)]^n = 1 + An + Bn^2 + Cn^3$$

auf beiden Seiten zur Potenz $\frac{x}{12}$, so ist:

$$[1 + (a-1)]^n = 1 + n(A + Bn + Cn \dots)^2,$$

und wenn: $Bn + Cn^2 \dots = z$

gesetzt wird, so ist:

$$[1 + (a-1)]^n = 1 + n(A + z)$$

und:

$$\begin{aligned}
[1 + (a-1)]^n \cdot \frac{x}{n} &= a^x = 1 + \frac{x}{n} \cdot n(A + z) \\
&+ \frac{\frac{x}{n} \cdot \frac{x}{n} - 1}{1 \cdot 2} n^2 (A + z)^2 + \frac{\frac{x}{n} \cdot \frac{x}{n} - 1 \cdot \frac{x}{n} - 2}{1 \cdot 2 \cdot 3} n^3 (A + z)^3 \dots,
\end{aligned}$$

oder:

$$\begin{aligned}
a^x &= 1 + x(A + z) + \frac{x(x-n)}{1 \cdot 2} (A + z)^2 \\
&+ \frac{x(x-n)(x-2n)}{1 \cdot 2 \cdot 3} (A + z)^3 \dots
\end{aligned}$$

n ist eine von x unabhängige Grösse, kann daher = 0 gesetzt werden, dann wird auch $z = 0$, und:

$$a^x = 1 + A x + \frac{A^2}{1 \cdot 2} x^2 + \frac{A^3}{1 \cdot 2 \cdot 3} x^3 \dots$$

Wird $A = 1$ und $x = 1$ gesetzt, so hat man:

$$e = 1 + 1 + \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} \dots$$

als Basis des natürlichen logarithmischen Systems:

$$= 2,718281828459,$$

dessen Modul = 1 ist.

5. Beispiel. Entwicklung des sin. und cosinus. Die Reihe für sinus x muss von der Form sein:

$$\text{I.} \quad \sin. x = a x + b x^3 + c x^5 \dots,$$

weil der sin. für $x = 0$ auch gleich 0 wird, und der sin. für $-x$ auch = $-$ wird, daher nur ungerade Potenzen.

$$\text{II.} \quad \cos. x = 1 + a' x^2 + b' x^4 + c' x^6$$

aus ähnlichen Gründen.

Wenn x unendlich klein ist, so ist:

$$\sin. x = x$$

und:

$$\sin. x = a x, \text{ also } \frac{\sin. x}{x} = a = 1.$$

Demnach ist der erste Koeffizient a bekannt.

Man hat also die speziellen Formen:

$$\text{III.} \quad \sin. x = x + b x^3 + c x^5 + d x^7 \dots,$$

$$\text{IV.} \quad \cos. x = 1 + a' x^2 + b' x^4 + c' x^6 \dots$$

$$1 = \sin. x^2 + \cos. x^2,$$

$$\sin. 2x = \sin. x \cdot \cos. x.$$

rt und auf 0 gebracht, gibt:

$$\begin{array}{r|l} x^3 + 2b & x^4 + 2c \\ + 2b' & + b^2 \\ + a'^2 & + 2c' \\ & + 2a'b' \end{array} \quad \begin{array}{r|l} x^6 + 2d & x^8 \\ + 2b^2c & \\ + 2d' & \\ + 2a'c' & \\ + b'^2 & \end{array}$$

multipliziert:

$$\begin{array}{r|l} x + b & x^2 + c \\ + a' & + a'b \\ & + b' \end{array} \quad \begin{array}{r|l} x^5 + d & x^7 \\ + a'c & \\ + b'b & \\ + c' & \end{array}$$

III statt x , $2x$, so hat man:

$$= x + 4bx^2 + 16cx^5 + 64dx^7 \dots$$

die Koeffizienten alle $= 0$ sein; in VI lie mit gleichen Potenzen verbundenen n.

$$\text{folglich } a' = -\frac{1}{2},$$

$$,, \quad b = -\frac{1}{2 \cdot 3},$$

$$= 0, \text{ folglich } b' = +\frac{1}{2 \cdot 3 \cdot 4},$$

$$16c, \text{ folglich } c = +\frac{1}{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5},$$

$$+ 2a'b' = 0, \text{ folgl. } c' = -\frac{1}{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6},$$

$$d + a'c + b'b + c' = 64d, \text{ folgl. } d = -\frac{1}{2 \dots 7},$$

$$2d + 2bc + 2d' + 2a'c' + b'^2 = 0, \text{ folglich } d' = +\frac{1}{2 \dots 8} \text{ etc.}$$

Formel aus der Differenzial-Rechnung.

Entwicklung der Taylor'schen Reihe.

Man sucht eine Entwicklung von $f(k) + i$ nach den Potenzen von i . Die eingeklammerte Grösse bedeute stets die variable, die andere die constante. Man setze und entwickle:

$$f(x) + k + i = a + b(k + i) + c(k + i)^2 + d(k + i)^3 \dots =$$

a	b	i	c	i ²	d	i ³	e	i ⁴
bk	2ck	3dk	4ek	5fk				
ck ²	3dk ²	6ek ²	10fk ²	15gk ²				
dk ³	4ek ³	10fk ³	20gk ³	...				
ek ⁴	5fk ⁴	15gk ⁴				
fk ⁵	6gk ⁵				
gk ⁶						
...	...							
...								
I.	II.	III.	IV.	V.				

Ferner ist: $if(x + k) + i$

$$= A + Bi + Ci^2 + Di^3 \dots$$

Also: $A = \text{Summa der Reihe I,}$

$B = \text{,, ,, ,, II u. s. w.}$

Hieraus ergibt sich, dass die Koeffizienten $A B \dots$ $a b \dots$ nur von der variabeln Grösse abhängen. Daher

daß A für alle möglichen Werthe von i stets gleich bleiben.
 Ist man also $i = 0$, so findet man:

$$A = f(x + k)$$

$$: \quad a = f(x).$$

Um nun die andern Koeffizienten zu finden, differenzire
 die Reihen I, II, III u. s. w., so kommt, wenn man
 die Summe der Reihen die Buchstaben A, B, C u. s. w.
 schreibt:

$$\frac{dA}{dk} = b + 2ck + 3dk^2 + 4ek^3 \dots = 1B,$$

$$\frac{dB}{dk} = 2c + 6dk + 12ck^2 \dots = 2C,$$

$$\frac{dC}{dk} = 3d + 12ek + 30fk \dots = 3D,$$

$$\frac{dD}{dk} = 4e + 20fk + 60gk^2 \dots = 4E,$$

Setzt man $x = 0$ und bezeichnet die Differenzial-
 tionen von $f k$ mit $\Delta k, \Delta^2 k$, u. s. w., so hat man:

$$A = f(k) \dots \dots \dots f k$$

$$B = \frac{d^1 f k}{dk} \dots \dots \dots \Delta k,$$

$$C = \frac{dB}{2dk} = \frac{d^2 f k}{1 \cdot 2 dk^2} \dots \dots \frac{\Delta^2 k}{1 \cdot 2},$$

$$D = \frac{dC}{3dk} = \frac{d^3 f k}{1 \cdot 2 \cdot 3 dk^3} \dots \dots \frac{\Delta^3 k}{1 \cdot 2 \cdot 3},$$

$$E = \frac{dD}{4dk} = \frac{d^4 f k}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 dk^4} \dots \dots \frac{\Delta^4 k}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4}.$$

Also:

$$f k + i = f k + \frac{\Delta k \cdot i}{1} + \frac{\Delta^2 k \cdot i^2}{1 \cdot 2} + \frac{\Delta^3 k \cdot i^3}{1 \cdot 2 \cdot 3},$$

oder anstatt k, x gesetzt:

$$f x + i = f x + \frac{d f x}{d i} i + \frac{d^2 f x}{d x^2} \cdot \frac{i^2}{1 \cdot 2} + \frac{d^3 f x}{d x^3} \cdot \frac{i^3}{1 \cdot 2 \cdot 3} \dots$$

Setzt man $f x = f 0 + x$, so entwickelt sich hieraus sehr leicht die Maclaurin'sche Reihe.

Man hat demnach zwei Hauptreihen, die in der höheren Mathematik eine vielfache Verwendung finden, nämlich:

a) die Taylor'sche Reihe.

$$f(x + i) = f x + \frac{d f x}{d x} i + \frac{d^2 f x}{d x^2} \cdot \frac{i^2}{1 \cdot 2} + \frac{d^3 f x}{d x^3} \cdot \frac{i^3}{1 \cdot 2 \cdot 3} \dots$$

und wenn $f(x = 0)$ den Werth von $f x$, wenn darin $x = 0$ ist, bedeutet:

b) die Maclaurin'sche Reihe.

$$f x = f(x = 0) + \frac{d f x = 0}{d x} x + \frac{d^2 f x = 0}{d x^2} \cdot \frac{x^2}{1 \cdot 2} + \frac{d^3 f x = 0}{d x^3} \cdot \frac{x^3}{1 \cdot 2 \cdot 3} \dots$$

$\frac{d f x}{d x}$ heisst der Differenzialquotient oder die abgeleitete Funktion 1., 2., 3. u. s. w.

Entwicklung des sinus und cosinus.

$$\begin{aligned}
 &= \cos. x \cdot \frac{d^2 \sin. x}{dx^2} = \frac{d \cos. x}{dx} = -\sin. x \\
 &= -\cos. x \cdot \frac{d^4 \sin. x}{dx^4} = \sin. x \cdot \frac{d^5 \sin. x}{dx^5} = \cos. x \\
 &\frac{d^6 \sin. x}{dx^6} = -\sin. x \cdot \frac{d^7 \sin. x}{dx^7} = -\cos. x.
 \end{aligned}$$

wären die sieben ersten Differenzialquotienten. = 0 gesetzt und nach der Maclaurin'schen Entwicklung gibt:

$$\sin. x = x - \frac{x^3}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \frac{x^5}{1 \cdot \dots \cdot 5} - \frac{x^7}{1 \cdot \dots \cdot 7} \dots$$

analoge Weise:

$$\cos. x = 1 - \frac{x^2}{1 \cdot 2} + \frac{x^4}{1 \cdot \dots \cdot 4} - \frac{x^6}{1 \cdot \dots \cdot 6} \dots$$

Entwicklung des Bogens x.

$$\text{tang. } x = \sec. x^2 dx = (1 + \text{tang. } x^2) dx,$$

$$\text{tang. } x \text{ sei } = t,$$

$$dt = (1 + t^2) \cdot dx,$$

Differenzial des Bogens:

$$dx = d \text{ arc. } x = \frac{dt}{1 + t^2},$$

oder:

$$\frac{d \text{ arc. tang. } t}{dt} = \frac{1}{1 + t^2} = (1 + t^2)^{-1},$$

$$f \cdot t (1 + t^2)^{-1} = 1 - t^2 + t^4 - t^6 + t^8 \dots$$

Nun sei der 1^{te} Differenzialquotient mit $f^1 x$ bezeichnet u. s. w., so ist:

$$f^1 x = 1 - t^2 + t^4 - t^6 + t^8 - t^{10} + t^{12} \dots,$$

$$f^2 x = -2t + 4t^3 - 6t^5 + 8t^7 \dots, \text{ d. h. } = d f^1 x,$$

$$f^3 x = -2 + 3 \cdot 4 t^2 - 5 \cdot 6 t^4 + 7 \cdot 8 t^6 \dots,$$

$$f^4 x = 2 \cdot 3 \cdot 4 t - 4 \cdot 5 \cdot 6 t^3 + 6 \cdot 7 \cdot 8 t^5 \dots,$$

$$f^5 x = 2 \cdot 3 \cdot 4 - 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 t + 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8 t^3 \dots$$

Nach Maclaurin'scher Reihe entwickelt, ist:

$$\text{arc. } x = f \cdot (t),$$

$$x = t - 2 \frac{t^3}{1 \dots 3} + 2 \cdot 3 \cdot 4 \frac{t^5}{1 \dots 5} \dots,$$

$$\text{arc. } x = t - \frac{1}{3} t^3 + \frac{1}{5} t^5 - \frac{1}{7} t^7 + \frac{1}{9} t^9 \dots,$$

Für:

$$t = 1 \text{ ist } x = \frac{1}{4} \pi = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} \dots$$

Entwicklung der Binomialreihe.

$$(a + x)^n$$

sei gegeben, so ist:

$$\frac{d(a+x)^n}{dx} = n \cdot (a+x)^{n-1},$$

$$\frac{d^2(a+x)^n}{dx^2} = n \cdot n-1 (a+x)^{n-2},$$

$$\frac{d^3(a+x)^n}{dx^3} = n \cdot n-1 \cdot n-2 (a+x)^{n-3},$$

$$\frac{d^4(a+x)^n}{dx^4} = n \cdot n-1 \cdot n-2 \cdot n-3 \cdot (a+x)^{n-4}.$$

Nach der Maclaurin'schen Reihe entwickelt:

$$(a+x)^n = a^n + n \cdot a^{n-1} x + \frac{n \cdot n-1 \cdot a^{n-2} x^2}{1 \cdot 2} \\ + \frac{n \cdot n-1 \cdot n-2 \cdot a^{n-3} x^3}{1 \cdot \dots \cdot 3}.$$

Entwicklung der Exponentialreihe.

a^x soll entwickelt werden:

$$d(a)^x = a^{x+i} - a^x = a^x (a^i - 1) : a^i = (1 + a - 1)^i,$$

also:

$$a^i = [1 + (a - 1)]^i = 1 + i(a - 1) + \frac{i \cdot i - 1}{1 \cdot 2} (a - 1)^2,$$

also:

$$a^x \cdot (a^i - 1) = a^x [i \cdot (a - 1) + \frac{i \cdot i - 1}{1 \cdot 2} (a - 1)^2$$

$$+ \frac{i \cdot i - 1 \cdot i - 2}{1 \cdot \dots \cdot 3} (a - 1)^3 \dots],$$

$$\frac{a^{x+i} - a^x}{i} = a^x \left[(a - 1) + \frac{i - 1}{2} (a - 1)^2 + \right.$$

$$\left. \frac{i - 1 \cdot i - 2}{1 \cdot 2 \cdot 3} (a - 1)^3 \dots \right]$$

$i = 0$ dann ist:

$$\frac{d(a)^x}{dx} = a^x \left[(a - 1) - \frac{1}{2} (a - 1)^2 + \frac{1}{3} (a - 1)^3 \right. \\ \left. - \frac{1}{4} (a - 1)^4 \dots \right]$$

Die Grösse zwischen der Klammer ist von a^x abhängig, also constant daher:

$$\frac{d(a)^x}{dx} = A \cdot a^x$$

zu setzen:

$$\frac{d^2 a^x}{dx^2} = A^2 a^x \quad \Bigg| \quad \frac{d^3 \cdot a^x}{dx^3} = A^3 a^x$$

u. s. w.

Nach der Maclaurin'schen Reihe entwickelt, ist:

$$a^x = 1 + Ax + \frac{A^2 x^2}{1 \cdot 2} + \frac{A^3 x^3}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \frac{A^4 x^4}{1 \cdot \dots \cdot 4} \dots$$

und: $A = (a - 1) - \frac{1}{2} (a - 1)^2 + \frac{1}{3} (a - 1)^3 - \dots$

A ist der Modul der Exponentialreihe. Setzt man:

$$A \text{ und } x = 1,$$

so erhält man den Beweis des natürlichen Logarithmen-
systems:

$$e = 2,71828.$$

Entwicklung der logarithmischen Reihe.

Nach dem Vorigen war:

$$\begin{aligned} \frac{d a^p}{d p} &= a^p \left\{ (a - 1) - \frac{1}{2} (a - 1)^2 + \frac{1}{3} (a - 1)^3 \dots \right\}, \\ &= a^p \cdot A. \end{aligned}$$

Nun sei:

$$a^p = x,$$

so ist für die Basis a:

$$p = \log_a x \text{ und } d p = d \log_a x,$$

also:

$$\frac{d x}{d \log_a x} = x \cdot A, \text{ also } \frac{d x}{x \cdot A} = d \log_a x.$$

I.

$$d \log_a x = \frac{1}{A} \cdot \frac{d x}{x}$$

$$\frac{d \log. x}{d x} = \frac{1}{A} \cdot \frac{1}{x},$$

folgt durch differenzieren der 1., 2., 3. Differenzial-

$$\begin{array}{l|l} = \frac{1}{A} \cdot \frac{1}{x}, & \frac{d^4 \log. x}{d x^4} = - \frac{1}{A} \cdot \frac{2 \cdot 3}{x^4}, \\ = - \frac{1}{A} \cdot \frac{1}{x^2}, & \frac{d^5 \log. x}{d x^5} = + \frac{1}{A} \cdot \frac{2 \cdot 3 \cdot 4}{x^5}, \\ = + \frac{1}{A} \cdot \frac{2}{x^3} & \frac{d^6 \log. x}{d x^6} = - \frac{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5}{x^6}, \end{array}$$

$$\log. x + z = \log. x + \frac{1}{A} \left\{ \frac{z}{x} - \frac{1}{2} \frac{z^2}{x^2} + \frac{1}{3} \frac{z^3}{x^3} - \frac{1}{4} \frac{z^4}{x^4} \right\}.$$

man $x = 1$, so hat man:

$$\text{z. B. } 1 + z = \frac{1}{A} \left\{ z - \frac{1}{2} z^2 + \frac{1}{3} z^3 - \frac{1}{4} z^4 \right\}$$

oder nach dem Vorigen der Exponentialmodul für $x = a$, setzt man ihn $= 1$, so bezieht sich der z^1 auf die Basis $= e$ und dann ist:

$$z) = \log. \text{ nat. } 1 + z = z - \frac{1}{2} z^2 + \frac{1}{3} z^3 - \frac{1}{4} z^4.$$

leicht man IV mit der Reihe für A , so ist:

$$A = \log. \text{ nat. } a,$$

und es ist also, wenn $\log. (1 + z)$ so viel heisst, als der auf die Basis a bezogene $\log.$ von $1 + z$:

$$V. \quad \log. (1 + z) = \frac{1}{\log. \text{nat. } a} \cdot \log. \text{nat. } 1 + z.$$

Integralrechnung. Fundamentalformen.

I. Integral von $du \sqrt{1 + u^2}$.

Man setze:

$$\sqrt{1 + u^2} = z - u,$$

so ergibt sich
$$\frac{u = z^2 - 1}{2z},$$

also:
$$du = \frac{dz^2 - 1}{2z} = du = \frac{z^2 + 1}{2z^2} \cdot dz,$$

also:
$$du \sqrt{1 + u^2} = \frac{(z^2 + 1)^2}{4z^3} \cdot dz = \frac{1}{4} z \cdot dz + \frac{1}{2} z^{-1} dz + \frac{1}{4} z^{-3} dz,$$

und nun integriert:

$$\int du \sqrt{1 + u^2} = \frac{1}{8} z^2 - \frac{1}{8} z^{-2} + \frac{1}{2} \log. z,$$

oder:
$$= \frac{1}{8} \left(z + \frac{1}{z} \right) \left(z - \frac{1}{z} \right) + \frac{1}{2} \log. z.$$

Da nun:
$$z - u = \sqrt{1 + u^2},$$

so ist:
$$z = -u + \sqrt{1 + u^2}.$$

nirt, gibt:

$$= \frac{1}{2} (2u + 2\sqrt{1+u^2}) + \frac{1}{2} \log. z,$$

oder Vereinfachung:

$$\frac{1}{2} (u\sqrt{1+u^2}) + \log. (u + \sqrt{1+u^2}).$$

Integral von $du\sqrt{1-u^2}$.

24. seien die Ordinaten der Punkte a, a'
• b, b' sei unendlich klein, also $= dx$; der

$$abcd = S,$$

so ist:

$$dS = dx\sqrt{1-x^2},$$

oder:

$$\int dx\sqrt{1-x^2} = S,$$

und wenn man die Abscisse anstatt mit x mit u bezeichnet, so ist:

$$\int du\sqrt{1-u^2} = S.$$

$$\sqrt{1-u^2} + \frac{1}{2} \text{arc. sin. } (= u),$$

$$= \frac{1}{2} [u\sqrt{1-u^2} + \text{arc. sin. } (= u)].$$

I. Integral $\frac{du}{\sqrt{1-u^2}}$.

$$d \sin. \alpha = \cos. \alpha \cdot d \alpha,$$

$$\frac{d \sin. \alpha}{\cos. \alpha} = d \alpha,$$

setzt man:

$$\sin. \alpha = u,$$

so ist:

$$d\alpha = \text{arc. sin. } (= u)$$

und:
$$\int \frac{d. \sin. \alpha}{\cos. \alpha} = \int \frac{d u}{\sqrt{1 - u^2}} = \text{arc. sin. } (= u).$$

IV. Integral
$$\frac{u d u}{\sqrt{1 - u^2}}.$$

Man setze:

$$\sqrt{1 - u^2} = z,$$

dann wird:

$$u = \sqrt{1 - z^2}$$

und:

$$u \cdot d u = - z d z,$$

also:

$$\frac{u d u}{\sqrt{1 - u^2}} = - \frac{z d z}{z},$$

$$\begin{aligned} \int \frac{u d u}{\sqrt{1 - u^2}} &= \int \frac{- z d z}{z} = \int - 1 d z = - z \\ &= - \sqrt{1 - u^2}. \end{aligned}$$

Folgendes sind nun Fundamentalformen.

I.
$$\int d u \sqrt{1 + u^2} = \frac{1}{2} (u \sqrt{1 + u^2} + \log. u + \sqrt{1 + u^2},$$

II.
$$\int d u \sqrt{1 - u^2} = \frac{1}{2} (u \sqrt{1 - u^2} + \text{arc. sin. } (= u),$$

III.
$$\frac{d u}{\sqrt{1 - u^2}} = \text{arc. sin. } (= u),$$

IV.
$$\frac{u d u}{\sqrt{1 - u^2}} = - \sqrt{1 - u^2}.$$

Differenzialformeln.

1. $d(a + u) = du,$
2. $d(au) = a \cdot du,$
3. $d(u + v + w + \dots) = du + dv + dw$
4. $d(uv) = u \cdot dv + v \cdot du,$
5. $d(uvw) = uv \cdot dw + vw \cdot du + uw \cdot dv$
6. $d \frac{u}{v} = \frac{v \cdot du - u \cdot dv}{v^2},$
7. $du^v = u^{v-1} (u \ln u \cdot dv + v \cdot du),$
8. $du^m = m u^{m-1} \cdot du,$
9. $da^u = a^u \ln a \cdot du,$
10. $d \log. (a) u = \frac{1}{u \ln a} \cdot du,$
11. $d \ln u = \frac{du}{u},$
12. $d \sin. u = \cos. u \cdot du,$
13. $d \cos. u = - \sin u \cdot du,$ Qua
14. $d \arcsin. u = \pm \frac{du}{\sqrt{1-u^2}},$ I; II.
+ -
15. $d \arccos. u = \mp \frac{du}{\sqrt{1-u^2}},$ - -
16. $d \sec. u = \frac{\sin. u \cdot du}{\cos.^2 u},$
17. $d \operatorname{cosec}. u = - \frac{\cos. u \cdot du}{\sin.^2 u},$ Qua
18. $d \operatorname{arc}. \sec u = \mp \frac{du}{u \sqrt{u^2 - 1}},$ I; II
- +

<p>19. $d \text{ arc. cosec. } u = \pm \frac{d u}{u \sqrt{u^2 - 1}},$</p> <p>20. $d \text{ tang. } u = \frac{d u}{\cos.^2 u},$</p> <p>21. $d \text{ cotang. } u = - \frac{d u}{\sin.^2 u},$</p> <p>22. $d \text{ arc. tang. } u = \frac{d u}{1 + u^2},$</p> <p>23. $d \text{ arc. cotang. } u = - \frac{d u}{1 + u^2}.$</p>	<p>Quadranten: I; II; III; IV; + + - -</p>
--	--

Integralformeln.

<p>1. $\int a \cdot d x = a \int d x + C = a x + C,$</p> <p>2. $\int x^n = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C; \int \frac{d x}{x^2} = -\frac{1}{x} + C,$</p> <p style="padding-left: 40px;">$\int \frac{d x}{\sqrt{x}} = 2 \sqrt{x} + C,$</p> <p>3. $\int \frac{d x}{x} = \ln x + C,$</p> <p>4. $\int e^x \cdot d x = e^x + C,$</p> <p>5. $\int a^x \cdot d x = \frac{a^x}{\ln a} + C,$</p> <p>6. $\int \frac{d x}{\sqrt{1-x^2}} = \pm \text{arc. sin. } x + C,$</p> <p>7. $\int \frac{d x}{\sqrt{1-x^2}} = \mp \text{arc. cos. } x + C,$</p>	<p>Quadranten: I; II; III; IV; + - - + - - + +</p>
--	--

Differenzialformeln.

1. $d(a + u) = du,$
2. $d(au) = a \cdot du,$
3. $d(u + v + w + \dots) = du + dv + dw + \dots,$
4. $d(uv) = u \cdot dv + v \cdot du,$
5. $d(uvw) = uv \cdot dw + vw \cdot du + uw \cdot dv,$
6. $d \frac{u}{v} = \frac{v \cdot du - u \cdot dv}{v^2},$
7. $du^v = u^{v-1} (u \ln u \cdot dv + v \cdot du),$
8. $du^m = m u^{m-1} \cdot du,$
9. $da^u = a^u \ln a \cdot du,$
10. $d \log. (a) u = \frac{1}{u \ln a} \cdot du,$
11. $d \ln u = \frac{du}{u},$
12. $d \sin. u = \cos. u \cdot du,$
13. $d \cos. u = - \sin. u \cdot du,$
14. $d \arcsin. u = \pm \frac{du}{\sqrt{1-u^2}},$
15. $d \arccos. u = \mp \frac{du}{\sqrt{1-u^2}},$
16. $d \sec. u = \frac{\sin. u \cdot du}{\cos.^2 u},$
17. $d \operatorname{cosec}. u = - \frac{\cos. u \cdot du}{\sin.^2 u},$
18. $d \operatorname{arcsec}. u = \mp \frac{du}{u \sqrt{u^2-1}},$

Quadranten:

I; II; III; IV;

+ - - +

- - + +

Quadranten:

I; II; III; IV;

- + + -

	Quadranten: I; II; III; IV; + + - -
19. $d \text{ arc. cosec. } u = \pm \frac{d u}{u \sqrt{u^2 - 1}}$,	
20. $d \text{ tang. } u = \frac{d u}{\cos.^2 u}$,	
21. $d \text{ cotang. } u = - \frac{d u}{\sin.^2 u}$,	
22. $d \text{ arc. tang. } u = \frac{d u}{1 + u^2}$,	
23. $d \text{ arc. cotang. } u = - \frac{d u}{1 + u^2}$.	

Integralformeln.

1. $\int a \cdot d x = a \int d x + C = a x + C,$	
2. $\int x^n = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C; \int \frac{d x}{x^2} = -\frac{1}{x} + C,$	
$\int \frac{d x}{\sqrt{x}} = 2 \sqrt{x} + C,$	
3. $\int \frac{d x}{x} = \ln x + C,$	
4. $\int e^x \cdot d x = e^x + C,$	
5. $\int a^x \cdot d x = \frac{a^x}{\ln a} + C,$	Quadranten: I; II; III; IV; + - - +
6. $\int \frac{d x}{\sqrt{1-x^2}} = \pm \text{arc. sin. } x + C,$	+ - - +
7. $\int \frac{d x}{\sqrt{1-x^2}} = \mp \text{arc. cos. } x + C,$	- - + +

$$8. \int -\frac{dx}{1+x^2} = \text{arc. cotang. } x + C.$$

9. Integration durch Theile: $\int u \cdot dv = uv - \int v \cdot du$,
wenn u und v Funktionen von x sind.

$$10. \int \frac{dx}{(a+bx^2)} = \frac{1}{\sqrt{ab}} \cdot \text{arc. tang. } \sqrt{\frac{b}{a}} \cdot x + C,$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{-ab}} \ln \frac{x\sqrt{b} - \sqrt{-a}}{x\sqrt{b} + \sqrt{-a}} + C,$$

für den Fall, dass a negativ ist.

$$= \frac{1}{2\sqrt{-ab}} \ln \frac{\sqrt{a} + x\sqrt{-b}}{\sqrt{a} - x\sqrt{-b}} + C,$$

wenn b negativ ist.

$$11. \int \frac{dx}{a+bx+cx^2} = \frac{1}{c\sqrt{\frac{a}{c} - \frac{b^2}{4c}}} \text{arc. tang.}$$

$$\frac{2cx+b}{\sqrt{4ac-2b^2}} + C.$$

$$12. \int \frac{dx}{\sqrt{a+bx}} = \frac{2}{b} \sqrt{a+bx} + C; \int \sqrt{a-bx} \cdot dx,$$

$$= \frac{2}{3b} (\sqrt{a+bx})^3 + C; \int \frac{x dx}{\sqrt{a+bx}},$$

$$= \frac{2}{3b^2} (bx-2a) \sqrt{a+bx} + C,$$

$$13. \int \sqrt{1+x^2} \cdot dx = \frac{x}{2} \sqrt{1+x^2} + \frac{1}{2} \ln(x + \sqrt{1+x^2}) + C,$$

$$14. \int \sqrt{1-x^2} \cdot dx = \frac{x}{2} \sqrt{1-x^2} + \frac{1}{2} \text{arc. sin. } x + C,$$

$$15. \int \sqrt{a^2-x^2} \cdot dx = \frac{x}{2} \sqrt{a^2-x^2} - \frac{1}{2} a^2 \text{arc. tang.} \\ \frac{\sqrt{a^2-x^2}}{x} + C.$$

$$16. \int \frac{dx}{\sqrt{a+bx+cx^2}} = \frac{1}{\sqrt{c}} \ln(b+cx \\ + 2\sqrt{c} \sqrt{a+bx+cx^2}) + C,$$

$$17. \int \frac{dx}{\sqrt{a+bx-cx^2}} = -\frac{2}{\sqrt{c}} \text{arc. tang.} \\ \frac{\sqrt{a} \sqrt{a+bx-cx^2}}{x\sqrt{c}} + C,$$

$$= -\frac{2}{\sqrt{c}} \text{arc. tang.} \sqrt{\frac{-2cx+b+\sqrt{4ac+b^2}}{2cx-b+\sqrt{4ac+b^2}}} + C, \\ = \frac{1}{\sqrt{c}} \text{arc. sin.} \frac{2cx-b}{\sqrt{4ac+b^2}} + C.$$

18. Die Berechnung von

$$\int \frac{x^m \cdot dx}{\sqrt{a+bx+cx^2}}$$

geschieht mittelst der Recursionsformel:

$$\int \frac{x^m dx}{X} = \frac{x^{m-1} X}{mc} - \frac{(m-1)a}{mc} \int \frac{x^{m-2} dx}{X} - \frac{(2m-1)b}{2mc} \\ \times \int \frac{x^{m-1} dx}{X}, \text{ wenn } X = \sqrt{a+bx+cx^2} \text{ ist.}$$

$$\int x^{m-1} (a + b x)^n \cdot dx = \frac{x^{m-1} (a + b x)^{n+1}}{(m+n)b} \\ - \frac{(m-1)a}{(m-n)b} \times \int x^{m-2} (a + b x)^n \cdot dx.$$

duktion des Exponenten von $a + b x$ dient die Formel:

$$\int x^{m-1} (a + b x)^n \cdot dx = \frac{x^m (a + b x)^n}{m+n} + \frac{n a}{m+n} \\ \times \int x^{m-1} (a + b x)^{n-1} \cdot dx.$$

$$\int \sin. x \cdot dx = -\cos. x + C; \int \cos. x \cdot dx = \sin. x + C.$$

$$\int \frac{dx}{\sin.^2 x} = -\cotang. x + C; \int \frac{dx}{\cos.^2 x} = \tang. x + C.$$

$$\int \frac{dx}{\sin. x} = \ln tg. \frac{x}{2} + C; \int \frac{dx}{\cos. x} = \ln tg. \left(\frac{\pi}{4} + \frac{x}{2} \right) \\ + C.$$

$$\int \frac{\sin. x \cdot dx}{\cos. x} = -\ln \cos. x + C; \int \frac{\cos. x \cdot dx}{\sin. x} \\ = \ln \sin. x + C.$$

$$\int \sin. x \cos. x \cdot dx = \frac{1}{2} \sin.^2 x + C; \int \frac{dx}{\sin. x \cos. x} \\ = \ln \tang. x + C.$$

$$\int \tang. x \cdot dx = -\ln \cos. x + C; \int \cotang. x \cdot dx \\ = \ln \sin. x + C.$$

$$\int x \sin. x \cdot dx = -x \cos. x + \sin. x + C;$$

$$\int x \cos. x \cdot dx = x \sin. x + \cos. x + C;$$

$$27. \int \sin.^n x \cdot dx = - \frac{\sin.^{n-1} x \cos. x}{n} + \frac{n-1}{n} \int \sin.^{n-2} x \cdot dx,$$

$$\int \cos.^n x \cdot dx = \frac{\sin. x \cos.^{n-1} x}{n} + \frac{n-1}{n} \int \cos.^{n-2} x \cdot dx.$$

$$28. \int \frac{dx}{\sin.^n x} = - \frac{\cos. x}{(n-1) \sin.^{n-1} x} + \frac{n-2}{n-1} \int \frac{dx}{\sin.^{n-2} x},$$

$$\int \frac{dx}{\cos.^n x} = \frac{\sin. x}{(n-1) \cos.^{n-1} x} + \frac{n-2}{n-1} \int \frac{dx}{\cos.^{n-2} x}.$$

$$29. \int \frac{\sin.^n x \cdot dx}{\cos.^n x} = \int \text{tang.}^n x \cdot dx = \frac{\text{tang.}^{n-1} x}{n-1} - \int \text{tang.}^{n-2} x \cdot dx,$$

$$\int \frac{\cos.^n x \cdot dx}{\sin.^n x} = \int \text{cotang.}^n x \cdot dx = - \frac{\text{cotang.}^{n-1} x}{n-1} - \int \text{cotang.}^{n-2} x \cdot dx.$$

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{a + b \cos. x} \\ &= -\frac{1}{\sqrt{b^2 - a^2}} \ln \frac{b + a \cos. x + \sqrt{b^2 - a^2} \sin. x}{a + b \cos. x}, \\ &= -\frac{1}{\sqrt{b^2 - a^2}} \text{arc. tang. } \frac{-(b + \cos. x)}{\sqrt{a^2 - b^2} \sin. x}. \end{aligned}$$

$$\int \text{arc. sin. } x \cdot dx = x \text{ arc. sin. } x \pm \sqrt{1 - x^2} + C,$$

Quadranten:
I; II; III; IV;
+ - - +

$$\int \text{arc. cos. } x \cdot dx = x \text{ arc. cos. } x \mp \sqrt{1 - x^2} + C,$$

Quadranten:
I; II; III; IV;
- - + +

$$\int \text{arc. tang. } x \cdot dx = x \text{ arc. tang. } x - \frac{1}{2} \ln(1 + x^2) + C,$$

$$\int \text{arc. cotg. } x \cdot dx = x \text{ arc. cotg. } x + \frac{1}{2} \ln(1 + x^2) + C,$$

$$\int_a^b = - \int_b^a; \quad \int_a^b = \int_a^c + \int_c^b,$$

$$\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos. x \cdot dx = 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos. x \cdot dx,$$

$$37. \int_0^{\pi} \sin.^2 x \cdot d x = 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin.^2 x \cdot d x,$$

$$38. \int_0^{\pi} \cos. x \cdot d x = 0.$$

$$39. \int_0^{\infty} \frac{d x}{a^2 + x^2} = \frac{\pi}{2 a},$$

$$40. \int_0^a \frac{d x}{\sqrt{1 - x^2}} = \frac{\pi}{2},$$

$$41. \int_0^{\infty} \frac{\sin. b x}{x} d x = \frac{\pi}{2},$$

$$42. \int_0^{\infty} \frac{\cos. b x}{x} d x = \infty,$$

$$43. \int_0^{\infty} c - x^2 \cdot d x = \frac{1}{2} \sqrt{\pi}.$$

Unbestimmte Formen.

1. Ist $\frac{\varphi(x)}{\psi(x)}$ für $x = a$ von der Form $\frac{0}{0}$, so erhält man den wahren Werth, wenn man in:

$$\frac{d \varphi(x)}{d x} \text{ und } \frac{d \psi(x)}{d x}; x = a \text{ setzt.}$$

1 Werth und:

$$\frac{d y}{d x} = 0$$

man in die Differenzialgleichung II. Ordnung,
selbe gilt wie ad 1.

$$z = f(x, y)$$

10 liefern:

$$\frac{d z}{d x} = 0 \text{ und } \frac{d z}{d y} = 0$$

1e, durch welche z zu einem Maximum oder
wird.

1t überhaupt ein Maximum oder Minimum statt-
1n, müssen obige Werthe die Bedingung:

$$\frac{d^2 f}{d x^2} \cdot \frac{d^2 f}{d y^2} > \left(\frac{d^2 f}{d x \cdot d y} \right)^2$$

und je nachdem sie der Grösse:

$$\frac{d^2 f}{d x^2} + 2 \frac{d^2 f}{d x \cdot d y} \cdot \frac{d y}{d x} + \frac{d^2 f}{d y^2} \cdot \left(\frac{d y}{d x} \right)^2$$

der $+$ Zeichen geben, entspreche sie einem
oder Maximum.

Logarithmentafel.

Einrichtung und Gebrauch der Logarithmentafel.

Die Logarithmentafel enthält die fünf ersten Dezimalziffern (Mantisse) der gemeinen Logarithmen aller ganzen Zahlen von 10 bis 2199. Die Ziffern in der ersten Vertikalkolonne und in der ersten Horizontalkolonne entsprechen den Nummern oder Zahlenwerthen, die übrigen Ziffern aber sind die diesen angehörigen Logarithmen ohne Kennziffern (Charakteristik) oder Ganze. Hat man die vordersten zwei oder drei Ziffern einer Zahl in der ersten Vertikalkolonne und die hinterste derselben in der ersten Horizontalreihe aufgesucht, so findet man den dieser Zahl entsprechenden Logarithmen, indem man den Ziffernkomplex aufsucht, der mit den ersten Ziffern in einerlei Horizontal- und mit der letzten Ziffer in einerlei Vertikalreihe zugleich steht. Z. B. für die Zahl 365 ist die Mantisse = 56229, weil diese Zahl in der mit 36 anfangenden Horizontal- und in der mit 5 anfangenden Vertikalreihe zugleich steht. Ebenso ist die Mantisse oder der die Dezimalstellen bildende Theil der Logarithmen von der Zahl 1379 = 13956, weil diese Zahl denjenigen Ort einnimmt, wo die durch (137) gehende

Horizontal- und die durch (9) gehende Vertikallinie sich begegnen.

Besteht die gegebene Zahl aus weniger als drei Ziffern, so hat man dieselbe durch Anhängen von Nullen in eine dreizifferige Zahl umzuändern, und nun das Aufsuchen auf die eben gezeigte Weise zu vollziehen. Hiernach hat man also statt 29 die Zahl 290 zu schreiben und findet die Mantisse des Logarithmen von 29 oder von $290 = 46240$, ebenso findet man dieselbe für die Zahl 6 oder 60 oder $600 = 77815$. Will man diese kleine Logarithmentafel auch zum Aufsuchen von Zahlen über 2199 gebrauchen, so muss man sich des Interpolirens bedienen, wobei die in der weiteren Vertikalkolonne enthaltenen Differenzen in Anwendung zu bringen sind. Hiernach findet man z. B. die Mantisse des Logarithmen von $3452 = 53782 + 0,2 \times 126 = 53782 + 25 = 53807$, weil 53782 der Zahl 345 entspricht und die Differenz zwischen den Logarithmen dieser Zahl und der nächstfolgenden (346) = 126 ist. Auf gleiche Weise findet man zur Zahl 7915 die logarithmische Mantisse $= 89818 + 0,5 \times 55 = 89818 + 27 = 89845$, weil 89818 der Zahl 791 entspricht und 55 die Differenz zwischen den Logarithmen von 791 und 792 ist.

Zur Auffindung der die Ganzen angehenden Kennziffer dient die Regel: die um Eins verminderte Anzahl der die Ganzen der gegebenen Zahl ausdrückenden Ziffern gibt die Ganzen oder die Charakteristik des entsprechenden Logarithmen. Hiernach ist z. B. die Kennziffer des Logarithmen von $365 = 3 - 1 = 2$, weil 365 aus drei, lauter Ganze anzeigenden Ziffern besteht; dagegen die Kennziffer des Logarithmen von $36,5 = 2 - 1 = 1$, weil 36,5 nur zwei Ziffern (3) und (6) enthält, welche Ganze ausdrücken; es ist ferner die Kennziffer zum Logarithmen aus $3,65 = 1 - 1 = 0$, weil in dieser Zahl nur eine Ziffer (3) vorhanden ist, welche Ganze angibt; endlich hat man für den Logarithmen aus 3650 die Charakteristik $= 4 - 1 = 3$, weil es hier vier Ziffern gibt, wodurch Ganze ausgedrückt werden. Hiernach ist:

$$\begin{aligned}
 \log. 3650 &= 3,56229, \\
 \log. 365 &= 2,56229, \\
 \log. 36,5 &= 1,56229, \\
 \log. 3,65 &= 0,56229.
 \end{aligned}$$

Hat der Zahlenwerth keine Ganzen, fängt also derselbe mit Nullen an, so hat man am Ende der Mantisse eine negative Charakteristik hinzuzufügen, die aus soviel Einheiten besteht, als die Zahl selbst Nullen vorstehen hat. So ist z. B. für die Zahl 0,1379 die logarithmische Charakteristik $= -1$ und für 0,01379 dieselbe $= -2$ u. s. w., weil jene Zahl (0,1379) mit einer, diese Zahl (0,01379) aber mit zwei Nullen anfängt. Man hat demnach:

$$\begin{aligned}
 \log. 0,1379 &= 0,13956 - 1, \\
 \log. 0,01379 &= 0,13956 - 2, \\
 \log. 0,001379 &= 0,13956 - 3 \text{ u. s. w.}
 \end{aligned}$$

Um zu einem gegebenen Logarithmen den Numerus zu finden, hat man die vollständige Mantisse mit Berücksichtigung der etwa vorstehenden Nullen in der Tabelle aufzusuchen und von der so gefundenen Stelle aus horizontal herüber und vertikal aufwärts zu gehen: die sich an den Enden dieser Bewegungen vorfindenden Ziffern geben, neben einander gesetzt, die entsprechende Zahl, wenn man noch so viel Ziffern als Ganze abschneidet, als die um Eins vermehrte Charakteristik Einheiten hat, oder so viel Nullen anhängt, als die etwa vorkommende negative Kennziffer unmittelbar angibt.

Hiernach ist z. B. der Numerus für den Logarithmen $2,93146 = 854$, denn von der Mantisse 93146 aus links und aufwärts gegangen, stösst man auf die Ziffern 85 und 4, und die um Eins vermehrte Charakteristik (2) zeigt an, dass die Ganzen des Numerus aus $(2 + 1) = 3$ Ziffern bestehen sollen. Dagegen ist der Numerus des Logarithmen $0,78319 = 6,07$, denn die Mantisse 78319 steht in der mit 60 anfangenden Horizontal- und in der mit 7 anfangenden Vertikalreihe, und es ist als Ganze nur eine Ziffer (6) abzuschneiden, weil, wenn man zur Charakteristik (Null)

Eins hinzufügt, wieder Eins daraus hervorgeht. Für den Logarithmen 0,61805 — 2 ist endlich der Numerus = 0,0415, denn 41 und 5 stehen mit 61805 in einerlei Horizontal- und Vertikallinie und die beiden Nullen entsprechen der negativen Kennziffer (— 2).

Auf gleiche Weise findet man:

$$\begin{aligned} \text{num. log. } 3,67852 &= 4770 \\ \text{,, } 1,67852 &= 47,7 \\ \text{,, } 0,67852 - 1 &= 0,477 \\ \text{,, } 0,67852 - 3 &= 0,00477. \end{aligned}$$

Findet man die Mantisse des gegebenen Logarithmen nicht genau in der Tabelle, so hat man den Numerus der nächst kleineren Mantisse aufzusuchen, und, wenn eine grössere Genauigkeit verlangt wird, den fehlenden Theil durch Interpolation zu finden. Z. B. für den Logarithmen 1,79407 ist annähernd der Numerus = 62,2, denn dieser entspricht dem nächst kleinern Logarithmen 1,79379. Nun ist aber die Differenz der zwei Mantissen 79407 und 79379 = 28, und die Differenz der zunächst aufeinander folgenden Mantissen in der Tafel = 79449 — 79379 = 70; es folgt daher die nöthige Korrektion = $\frac{28}{70} = 0,4$, die gesuchte Zahl also = 62,24.

Auf gleiche Weise folgt:

$$\begin{aligned} \text{num. log. } 0,65118 - 4,47 + \frac{118 - 31}{9700} &= 4,47 + \frac{87}{9700} \\ &= 4,479, \text{ denn } 87 \text{ ist die Differenz zwischen den Mantissen} \\ &\text{des gegebenen und des nächst kleinern Logarithmen, und} \\ &97 \text{ ist die zwischen der nächst grössern und nächst kleinern} \\ &\text{Mantisse.} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Ebenso num. log. } 0,46951 - 2 &= 0,0294 + \frac{951 - 835}{1470000} \\ &= 0,0294 + \frac{0,0116}{147} = 0,02948. \end{aligned}$$

Ist die Mantisse des gegebenen Logarithmen kleiner als 34223, so kann man die Interpolation vereinfachen oder gar unnöthig machen, wenn man sich der zweiten Hälfte der Tafel bedient, die gegebene Mantisse also in dieser aufsucht. So gibt dieselbe für den Logarithmen 3,26174 den vierzifferigen Numerus 1827 unmittelbar; auch erhält man den Numerus der Logarithmen $0,21152 = 1,627$ mit der Korrektion $\frac{52-39}{26} = \frac{13}{26} = 0,5$, also num. log. $0,21152 = 1,6275$.

Anwendung der Logarithmen auf das Rechnen.

1. Das Produkt zweier Zahlen wird erhalten, wenn man die Logarithmen der Zahlen addirt und zur Summe den Numerus aufsucht.

2. Der Quotient zweier Zahlen ergibt sich, wenn man den Logarithmen des Divisors von dem Logarithmen des Dividenden abzieht und zu dem erhaltenen Reste die Zahl aufsucht.

3. Eine Zahl wird zur Potenz erhoben, wenn man den Logarithmen derselben durch den Exponenten multiplicirt und zu dem Produkte den Numerus sucht.

4. Man findet die Wurzel einer gegebenen Zahl, wenn man den Logarithmen derselben durch den Exponenten dividirt und zu dem Quotienten den Numerus aufsucht.

Nr.	0	1	2	3	4	5
10	00000	00432	00860	01284	01703	02119
11	04139	04532	04922	05308	05690	06070
12	07918	08279	08636	08991	09342	09691
13	11394	11727	12057	12385	12710	13033
14	14613	14922	15229	15534	15836	16137
15	17609	17898	18184	18469	18752	19033
16	20412	20683	20952	21219	21484	21748
17	23045	23300	23553	23805	24055	24304
18	25527	25768	26007	26245	26482	26717
19	27875	28103	28330	28556	28780	29003
20	30103	30320	30535	30750	30963	31175
21	32222	32428	32634	32838	33041	33244
22	34242	34439	34635	34830	35025	35218
23	36173	36361	36549	36736	36922	37107
24	38021	38202	38382	38561	38739	38917
25	39794	39967	40140	40312	40483	40654
26	41497	41664	41830	41996	42160	42325
27	43136	43297	43457	43616	43775	43933
28	44716	44871	45025	45179	45332	45484
29	46240	46389	46538	46687	46835	46982
30	47712	47857	48001	48144	48287	48430
31	49136	49276	49415	49554	49693	49831
32	50515	50651	50786	50920	51055	51188
33	51851	51983	52114	52244	52375	52504
34	53148	53275	53403	53529	53656	35782
35	54407	54531	54654	54777	54900	55023
36	55630	55751	55871	55991	56110	56229
37	56820	56937	57054	57171	57287	57403
38	57978	58093	58206	58320	58433	58546
39	59106	59218	59329	59439	59550	59660

Nr.	6	7	8	9	Differenzen.
10	02531	02938	03342	03743	432 ÷ 396
11	06446	06819	07188	07555	393 ÷ 363
12	10037	10380	10721	11059	361 ÷ 335
13	13354	13672	13988	14301	333 ÷ 312
14	16435	16732	17026	17319	309 ÷ 290
15	19312	19590	19866	20140	289 ÷ 272
16	22011	22272	22531	22789	271 ÷ 256
17	24551	24797	25042	25285	255 ÷ 242
18	26951	27184	27416	27646	241 ÷ 229
19	29226	29447	29667	29885	228 ÷ 218
20	31387	31597	31806	32015	217 ÷ 207
21	33445	33646	33846	34044	206 ÷ 198
22	35411	35603	35793	35984	197 ÷ 189
23	37291	37475	37658	37840	188 ÷ 181
24	39094	39270	39445	39620	181 ÷ 174
25	40824	40993	41162	41330	173 ÷ 167
26	42488	42651	42813	42975	167 ÷ 161
27	44091	44248	44404	44560	161 ÷ 156
28	45637	45788	45939	46090	155 ÷ 150
29	47129	47276	47422	47567	149 ÷ 145
30	48572	48714	48855	48996	145 ÷ 140
31	49969	50106	50243	50379	140 ÷ 136
32	51322	51455	51587	51720	136 ÷ 132
33	52634	52763	52892	53020	132 ÷ 128
34	53908	54033	54158	54283	127 ÷ 124
35	55145	55267	55388	55509	124 ÷ 121
36	56348	56467	56585	56703	121 ÷ 117
37	57519	57634	57749	57864	117 ÷ 114
38	58659	58771	58883	58995	115 ÷ 111
39	59770	59879	59988	60097	112 ÷ 109

Nr.	0	1	2	3	4	5
40	60206	60314	60423	60531	60638	60746
41	61278	61384	61490	61595	61700	61805
42	62325	62428	62531	62634	62737	62839
43	63347	63448	63548	63649	63749	63849
44	64345	64444	64542	64640	64738	64836
45	65321	65418	65514	65610	65706	65801
46	66276	66370	66464	66558	66652	66745
47	67210	67302	67394	67486	67578	67669
48	68124	68215	68305	68395	68485	68574
49	69020	69108	69197	69285	69373	69461
50	69897	69984	70070	70157	70243	70329
51	70757	70842	70927	71012	71096	71181
52	71600	71684	71767	71850	71933	72016
53	72428	72509	72561	72673	72754	72835
54	73239	73320	73400	73480	73560	73640
55	74036	74115	74194	74273	74351	74429
56	74819	74896	74974	75051	75128	75205
57	77587	75664	75740	75815	75891	75967
58	76343	76418	76492	76567	76641	76716
59	77085	77159	77232	77305	77379	77452
60	77815	77887	77960	78032	78104	78176
61	78533	78604	78675	78746	78817	78888
62	79239	79309	79379	79449	79518	79588
63	79934	80003	80072	80140	80209	80277
64	80618	80686	80754	80821	80889	80956
65	81291	81358	81425	81491	81558	81624
66	81954	82020	82086	82151	82217	82282
67	82607	82672	82737	82802	82866	82930
68	83251	83315	83378	83442	83506	83569
69	83885	83948	84011	84073	84136	84198

Nr.	6	7	8	9	Differenzen.
40	60859	60959	61066	61172	108 ÷ 106
41	61909	62014	62118	62221	106 ÷ 104
42	62941	63048	63144	63246	103 ÷ 101
43	63949	64048	64147	64246	101 ÷ 99
44	64933	65031	65128	65225	99 ÷ 97
45	65896	65992	66087	66181	97 ÷ 95
46	66839	66932	67025	67117	94 ÷ 93
47	67761	67852	67943	68034	92 ÷ 90
48	68664	68753	68842	68931	90 ÷ 89
49	69548	69636	69723	69810	88 ÷ 87
50	70415	70501	70586	70672	87 ÷ 86
51	71265	71349	71433	71517	84 ÷ 85
52	72099	72181	72263	72346	83
53	72916	72997	73078	73159	81
54	73719	73799	73878	73957	80
55	74507	74586	74663	74741	78
56	75282	75358	75435	75511	77
57	76042	76118	76193	76268	76
58	76790	76864	76938	77012	74
59	77525	77597	77670	77743	73
60	78247	78319	78390	78462	72
61	78958	79029	79099	79169	71
62	79657	79727	79796	79865	69
63	80346	80414	80482	80550	68
64	81023	81090	81158	81224	67
65	81690	81757	81823	81889	66
66	82347	82413	82478	82543	65
67	82995	83059	83123	83187	64
68	83632	83696	83759	83822	63
69	84261	84323	84386	84448	63

Nr	0	1	2	II	4	5
70	84510	84572	84634	84696	84757	94819
71	85126	85187	85248	85309	85370	85431
72	85733	85794	85854	85914	85974	86034
73	86341	86392	86451	86510	86570	86629
74	86923	86982	87040	87099	87157	87216
75	87506	87564	87622	87680	87737	87795
76	88081	88138	88196	88252	88309	88366
77	88649	88705	88762	88818	88874	88930
78	89209	89265	89321	89376	89432	89487
79	89763	89818	89873	89927	89982	90037
80	90309	90363	90417	90472	90526	90580
81	90849	90902	90956	91009	91062	91116
82	91381	91434	91487	91540	91593	91645
83	91908	91960	92012	92065	92117	92169
84	92428	92480	92531	92583	92634	92686
85	92942	92993	93044	93095	93146	93197
86	93450	93500	93551	93601	93651	93702
87	93952	94002	94052	94101	94151	94201
88	94448	94498	94547	94596	94645	94694
89	94939	94988	95036	95085	95134	95182
90	95424	95472	95521	95569	95617	95665
91	95904	95952	95999	96047	96095	96142
92	96379	96426	96473	96520	96567	96614
93	96848	96895	96942	96988	97035	97081
94	97313	97359	97405	97451	97497	97543
95	97772	97818	97864	97909	97955	98000
96	98227	98272	98318	98363	98408	98453
97	98677	98722	98767	98811	98856	98900
98	99123	99167	99211	99255	99300	99344
99	99564	99607	99651	99695	99739	99782

Nr.	6	7	8	9	Differenzen.
70	84880	84942	85003	85065	62
71	85491	85552	85612	85673	61
72	86094	86153	86213	86273	60
73	86688	86747	86806	86864	59
74	87274	87332	87390	87448	58
75	87852	87910	87967	88024	58
76	88423	88480	88536	88593	57
77	88986	89042	89098	89154	56
78	89542	89597	89653	89708	55
79	90091	90146	90200	90255	55
80	90634	90687	90741	90795	54
81	91169	91222	91275	91328	53
82	91698	91751	91803	91855	53
83	92221	92273	92324	92376	52
84	92737	92788	92840	92891	51
85	93247	93298	93349	93399	51
86	93752	93802	93852	93902	50
87	94250	94300	94349	94399	50
88	94743	94792	94841	94890	49
89	95231	95279	95328	95376	49
90	95713	95761	95809	95856	48
91	96190	96237	96284	96332	47
92	96661	96708	96755	96802	47
93	97128	97174	97220	97267	46
94	97589	97635	97681	97727	46
95	98046	98091	98137	98182	45
96	98498	98543	98588	98632	45
97	98945	98989	99034	99078	45
98	99388	99432	99476	99520	44
99	99826	99870	99913	99957	44

Nr.	0	1	2	3	4	5
100	00000	00043	00087	00130	00173	00217
101	00432	00475	00518	00561	00604	00647
102	00860	00903	00945	00988	01030	01072
103	01284	01326	01368	01410	01452	01494
104	01703	01745	01787	01828	01870	01912
105	02119	02160	02202	02243	02284	02325
106	02531	02572	02612	02653	02694	02735
107	02938	02979	03019	03060	03100	03141
108	03342	03383	03423	03463	03500	03543
109	03743	03782	03822	03862	03903	03941
110	04139	04179	04218	04258	04297	04336
111	04532	04571	04610	04650	04689	04727
112	04922	04961	04999	05038	05077	05115
113	05308	05346	05385	05423	05461	05500
114	05690	05729	05767	05805	05843	05881
115	06070	06108	06145	06183	06221	06258
116	06446	06483	06521	06558	06595	06633
117	06819	06856	06893	06930	06967	07004
118	07188	07225	07262	07298	07335	07372
119	07555	07591	07628	07664	07700	07737
120	07918	07954	07990	08027	08063	08099
121	08279	08314	08350	08386	08422	08458
122	08636	08672	08707	08743	08778	08814
123	08991	09026	09061	09096	09132	09167
124	09342	09377	09412	09447	09482	09517
125	09691	09726	09760	09795	09830	09864
126	10037	10072	10106	10140	10175	10209
127	10380	10415	10449	10483	10517	10551
128	10721	10755	10789	10823	10857	10890
129	11059	11093	11126	11160	11193	11227

Nr.	6	7	8	9	Differenzen.
100	00260	00308	00346	00389	43
101	00689	00732	00775	00817	43
102	01115	01157	01199	01242	42
103	01536	01578	01620	01662	42
104	01953	01995	02036	02078	42
105	02366	02408	02449	02490	41
106	02776	02816	02857	02898	41
107	03181	03222	03262	03302	41
108	03583	03623	03663	03703	40
109	03981	04021	04060	04100	40
110	04376	04415	04454	04493	39
111	04766	04805	04844	04883	39
112	05154	05192	05231	05269	39
113	05538	05576	05614	05652	- 38
114	05918	05956	05994	06032	38
115	06296	06333	06371	06408	38
116	06670	06707	06744	06781	37
117	07041	07078	07115	07151	37
118	07408	07445	07482	07518	37
119	07773	07809	07846	07882	36
120	08135	08171	08207	08243	36
121	08493	08529	08565	08600	36
122	08849	08884	08920	08955	36
123	09202	09237	09272	09307	35
124	09552	09587	09621	09656	35
125	09899	09934	09968	10003	35
126	10243	10278	10312	10346	34
127	10585	10619	10653	10687	34
128	10924	10958	10992	11025	34
129	11261	11294	11327	11361	33

Nr.	0	1	2	3	4	5
130	11394	11428	11461	11494	11528	11561
131	11727	11760	11793	11826	11860	11893
132	12057	12090	12123	12156	12189	12222
133	12385	12418	12450	12483	12516	12548
134	12710	12743	12775	12808	12840	12872
135	13033	13066	13098	13130	13162	13194
136	13354	13386	13418	13450	13481	13513
137	13672	13704	13735	13767	13799	13830
138	13988	14019	14051	14082	14114	14145
139	14301	14333	14364	14395	14426	14457
140	14613	14644	14675	14706	14737	14768
141	14922	14953	14983	15014	15045	15076
142	15229	15259	15290	15320	15351	15381
143	15534	15564	15594	15625	15655	15685
144	15836	15866	15897	15927	15957	15987
145	16137	16167	16197	16227	16256	16286
146	16435	16465	16495	16524	16554	16584
147	16732	16761	16791	16820	16850	16879
148	17026	17056	17085	17114	17143	17173
149	17319	17348	17377	17406	17435	17464
150	17609	17638	17667	17696	17725	17754
151	17898	17926	17955	17984	18126	18041
152	18184	18213	18241	18270	18299	18327
153	18469	18498	18526	18554	18583	18611
154	18752	18780	18808	18837	18865	18893
155	19033	19061	19089	19117	19145	19173
156	19312	19340	19368	19396	19424	19451
157	19590	19618	19645	19673	19700	19728
158	19866	19893	19921	19948	19976	20003
159	20140	20167	20194	20222	20249	20276

Nr.	6	7	8	9	Differenzen.
130	11594	11628	11661	11694	33
131	11926	11959	11992	12024	33
132	12254	12287	12320	12353	32
133	12581	12613	12646	12678	32
134	12905	12937	12969	13001	32
135	13226	13258	13290	13322	32
136	13545	13577	13609	13640	32
137	13862	13893	13925	13956	32
138	14176	14208	14239	14270	31
139	14489	14520	14551	14582	31
140	14799	14829	14860	14891	31
141	15106	15137	15168	15198	31
142	15412	15442	15473	15503	31
143	15715	15746	15776	15806	30
144	16017	16047	16077	16107	30
145	16316	16346	16376	16406	30
146	16613	16643	16673	16702	30
147	16909	16938	16967	16997	29
148	17202	17231	17260	17289	29
149	17493	17522	17551	17580	29
150	17783	17811	17840	17869	29
151	18070	18099	18127	18156	29
152	18355	18384	18412	18441	28
153	18639	18667	18696	18724	28
154	18921	18949	18977	19005	28
155	19201	19229	19257	19285	28
156	19479	19507	19535	19562	28
157	19756	19783	19811	19838	28
158	20030	20058	20085	20112	27
159	20303	20330	20358	20385	27

Nr.	0	1	2	3	4	5
160	20412	20439	20466	20498	20520	20548
161	20683	20710	20737	20768	20790	20817
162	20952	20978	21005	21032	21059	21085
163	21219	21245	21272	21299	21325	21352
164	21484	21511	21537	21564	21590	21617
165	21748	21775	21801	21827	21854	21880
166	22011	22037	22063	22089	22115	22141
167	22272	22298	22324	22350	22376	22401
168	22531	22557	22583	22608	22634	22660
169	22789	22814	22840	22866	22891	22917
170	23045	23070	23096	23121	23147	23172
171	23300	23325	23350	23376	23401	23426
172	23553	23578	23603	23629	23654	23679
173	23805	23830	23855	23880	23905	23930
174	24055	24080	24105	24130	24155	24180
175	24304	24329	24353	24378	24403	24428
176	24551	24576	24601	24625	24650	24674
177	24797	24822	24846	24871	24895	24920
178	25042	25066	25091	25115	25139	25164
179	25285	25310	25334	25358	25382	25406
180	25527	25551	25575	25600	25624	25648
181	25768	25792	25816	25840	25864	25888
182	26007	26031	26055	26079	26102	26126
183	26245	26269	26293	26316	26340	26364
184	26482	26505	26529	26553	26576	26600
185	26717	26741	26764	26788	26811	26834
186	26951	26975	26998	27021	27045	27068
187	27184	27207	27231	27254	27277	27300
188	27416	27439	27462	27485	27508	27531
189	27646	27669	27692	27715	27738	27761

Nr.	6	7	8	9	Differenzen.
160	20575	20602	20629	20656	27
161	20844	20871	20898	20925	27
162	21112	21139	21165	21192	27
163	21378	21405	21431	21458	27
164	21643	21669	21696	21722	26
165	21906	21932	21958	21985	26
166	22168	22194	22220	22246	26
167	22427	22453	22479	22505	26
168	22686	22712	22737	22763	26
169	22943	22968	22994	23019	26
170	23198	23223	23249	23274	25
171	23452	23477	23502	23528	25
172	23704	23729	23754	23780	25
173	23955	23980	24005	24030	25
174	24204	24229	24254	24279	25
175	24452	24477	24502	24527	25
176	24699	24724	24748	24773	25
177	24944	24969	24993	25018	24
178	25188	25212	25237	25261	24
179	25431	25455	25479	25503	24
180	25672	25696	25720	25744	24
181	25912	25935	25959	25983	24
182	26150	26174	26198	26221	24
183	26387	26411	26435	26458	24
184	26623	26647	26670	26694	24
185	26858	26881	26905	26928	23
186	27091	27114	27138	27161	23
187	27323	27346	27370	27393	23
188	27554	27577	27600	27623	23
189	27784	27807	27830	27853	23

Nr.	0	1	2	3	4	5
190	27875	27898	27921	27944	27967	27990
191	28103	28126	28149	28172	28194	28217
192	28330	28353	28375	28398	28421	28443
193	28556	28578	28601	28623	28646	28668
194	28780	28803	28825	28847	28870	28892
195	29003	29026	29048	29070	29092	29115
196	29226	29248	29270	29292	29314	29336
197	29447	29469	29491	29513	29535	29557
198	29667	29688	29710	29732	29754	29776
199	29885	29907	29929	29951	29973	29994
200	30103	30125	30146	30168	30190	30211
201	30320	30341	30363	30384	30406	30428
202	30535	30557	30578	30600	30621	30643
203	30750	30771	30792	30814	30835	30856
204	30963	30984	31006	31027	31048	31069
205	31175	31197	31218	31239	31260	31281
206	31387	31408	31429	31450	31471	31492
207	31597	31618	31639	31660	31681	31702
208	31806	31827	31848	31869	31890	31911
209	32015	32035	32056	32077	32098	32118
210	32222	32243	32263	32284	32305	32325
211	32428	32449	32469	32490	32511	32531
212	32634	32654	32675	32695	32715	32736
213	32838	32858	32879	32899	32919	32940
214	33041	33062	33082	33102	33122	33143
215	33244	33264	33284	33304	33325	33345
216	33445	33465	33486	33506	33526	33546
217	33646	33666	33686	33706	33726	33746
218	33846	33866	33885	33905	33925	33945
219	34044	34064	34084	34104	34124	34143

Nr.	6	7	8	9	Differenzen.
190	28012	28035	28058	28081	23
191	28240	28262	28285	28308	23
192	28466	28488	28511	28533	23
193	28691	28713	28735	28758	22
194	28914	28937	28959	28981	22
195	29137	29159	29181	29203	22
196	29358	29380	29403	29425	22
197	29579	29601	29623	29645	22
198	29798	29820	29842	29863	22
199	30016	30038	30060	30081	22
200	30233	30255	30276	30298	22
201	30449	30471	30492	30514	22
202	30664	30685	30707	30728	22
203	30878	30899	30920	30942	22
204	31091	31112	31133	31154	21
205	31302	31323	31345	31366	21
206	31513	31534	31555	31576	21
207	31723	31744	31765	31785	21
208	31931	31952	31973	31994	21
209	32139	32160	32181	32201	21
210	32346	32366	32387	32408	21
211	32552	32572	32593	32613	21
212	32756	32777	32797	32818	21
213	32960	32980	33001	33021	20
214	33163	33183	33203	33224	20
215	33365	33385	33405	33425	20
216	33566	33586	33606	33626	20
217	33766	33786	33806	33826	20
218	33965	33985	34005	34025	20
219	34163	34183	34203	34223	20

Tafel der natürlichen Logarithmen.

tung und Gebrauch der nachstehenden
Tafel.

den gemeinen oder briggschen, sich auf
Zahl 10 beziehenden Logarithmen, braucht man
noch die natürlichen oder hyperbolischen
Logarithmen, deren Grundzahl 2,7182818... ist. Nach-
stehende Tafel enthält die Werthe derselben für die natür-
lichen Zahlenreihe 1, 2, 3... bis 299. Die Einrichtung
dieser Tafel weicht von der Einrichtung der gemeinen
Logarithmentafel nicht ab. Hat man die letzte
Ziffer der gegebenen Zahl in der obersten
Zifferreihe und die vorhergehende Ziffer oder das vor-
hergehende Ziffern paar in der vordern Vertikalreihe auf-
gefunden, so findet man den entsprechenden natürlichen Loga-
rithmen, wenn man von jener Ziffer ab- und von dieser
zu diesem Ziffern paare bis zur Begegnung herüber-
geht. B. log. nat. 73 ist = 4,2905, weil diese Zahl
unter der letzten Ziffer (3) und mit der ersten
in einerlei Horizontalreihe liegt. Ebenso ist
log. nat. 57 = 5,0562, denn diese Zahl steht in der mit
5 beginnenden Vertikal- und in der mit 15 anfangenden
Horizontalreihe.

Mithilfe dieser Tabelle lassen sich leicht andere Loga-
rithmen, welche in der Tabelle selbst nicht stehen,
finden, die einfachsten Regeln der Logarithmenrechnung
anwenden bringt. Z. B.:

$$\log. \text{ nat. } 1,84 = \log. \text{ nat. } \left(\frac{184}{100} \right)$$

$$\log. \text{ nat. } 184 - \log. \text{ nat. } 100 = 5,2149 - 4,6052 = 4,6097.$$

oder:

$$\log. \text{ nat. } \frac{67}{136} = \log. \text{ nat. } 67 - \log. \text{ nat. } 136$$

$$= 4,2047 - 4,9127 = -0,7080.$$

Geht die Zahl über 299 hinaus, so muss man das Interpolationsverfahren einschlagen, um den entsprechenden Logarithmus zu finden. Z. B.: $\log. \text{nat. } 124,7$

$$\begin{aligned} &= \log. \text{nat. } 124 + 0,7 \times (\log. \text{nat. } 125 - \log. \text{nat. } 124) \\ &= 4,8203 + 0,7 \times (4,8283 - 4,8203) = 4,8203 + 0,7 \times 0,0080 \\ &= 4,8203 + 0,0056 = 4,8259. \end{aligned}$$

Durch Zerlegung in Faktoren kann man zuweilen die Interpolation entbehrlich machen. Z. B.: $\log. \text{nat. } 1247$

$$\begin{aligned} &= \log. \text{nat. } (29 \times 43) = \log. \text{nat. } 29 + \log. \text{nat. } 43 \\ &= 3,3673 + 3,7612 = 7,1285; \text{ daher } \log. \text{nat. } 124,7 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= \log. \text{nat. } \left(\frac{1247}{10} \right) = \log. \text{nat. } 1247 - \log. \text{nat. } 10 \\ &= 7,1285 - 2,3026 = 4,8259, \text{ wie so eben gefunden wurde.} \end{aligned}$$

Um zu den natürlichen Logarithmen die Zahl zu finden, ist das Interpolationsverfahren fast immer einzuschlagen. Welche Zahl x entspricht z. B. dem natürlichen Logarithmus 5,0900? $\log. \text{nat. } 162 = 5,0876$ und $\log. \text{nat. } 163 = 5,0938$; daher $\log. \text{nat. } 163 - \log. \text{nat. } 162 = 0,0062$, und $\log. \text{nat. } x - \log. \text{nat. } 162 = 0,0024$. Setzt man nun:

$$\frac{x - 162}{163 - 162} = \frac{\log. \text{nat. } x - \log. \text{nat. } 162}{\log. \text{nat. } 163 - \log. \text{nat. } 162} = \frac{0,0024}{0,0062},$$

so erhält man:

$$x = 162 + \frac{24}{62} = 162,4.$$

Ferner: $\log. \text{nat. } x$ sei = 6,9045, was ist x ?

$\log. \text{nat. } 10 = 2,3026$, daher $\log. \text{nat. } \frac{x}{10}$, oder $\log. \text{nat. } x -$

$\log. \text{nat. } 10 = 4,6019$. Nun ist $\log. \text{nat. } 100 = 4,6052$ und $\log. \text{nat. } 99 = 4,5951$; es folgt daher:

$$\frac{\frac{x}{10} - 99}{100 - 99} = \frac{4,6019 - 4,5951}{4,6052 - 4,5951},$$

$$\frac{x}{10} = 99 + \frac{68}{101} = 99,67 \text{ und } x = 996,7.$$

Nr.	0	1	2	3	4
0	— ∞	0,0000	0,6931	1,0986	1,3863
1	2,3026	2,3979	2,4849	2,5649	2,6391
2	2,9957	3,0445	3,0910	3,1355	3,1781
3	3,4012	3,4340	3,4657	3,4965	3,5264
4	3,6889	3,7136	3,7377	3,7612	3,7842
5	3,9120	3,9318	3,9512	3,9703	3,9890
6	4,0943	4,1109	4,1271	4,1431	4,1589
7	4,2485	4,2627	4,2767	4,2905	4,3041
8	4,3820	4,3944	4,4067	4,4188	4,4308
9	4,4998	4,5109	4,5218	4,5326	4,5433
10	4,6052	4,6151	4,6250	4,6347	4,6444
11	4,7005	4,7095	4,7185	4,7274	4,7362
12	4,7875	4,7958	4,8040	4,8122	4,8203
13	4,8675	4,8752	4,8828	4,8903	4,8978
14	4,9416	4,9488	4,9558	4,9628	4,9698
15	5,0106	5,0173	5,0239	5,0304	5,0370
16	5,0752	5,0814	5,0876	5,0938	5,0999
17	5,1358	5,1417	5,1475	5,1533	5,1591
18	5,1930	5,1985	5,2040	5,2095	5,2149
19	5,2470	5,2523	5,2575	5,2627	5,2679
20	5,2983	5,3033	5,3083	5,3132	5,3181
21	5,3471	5,3519	5,3566	5,3613	5,3660
22	5,3936	5,3982	5,4027	5,4072	5,4116
23	5,4381	5,4424	5,4467	5,4510	5,4553
24	5,4806	5,4848	5,4889	5,4931	5,4972
25	5,5215	5,5255	5,5294	5,5334	5,5373
26	5,5607	5,5645	5,5683	5,5722	5,5759
27	5,5984	5,6021	5,6058	5,6095	5,6131
28	5,6348	5,6384	5,6419	5,6454	5,6490
29	5,6699	5,6733	5,6768	5,6802	5,6836

Nr.	5	6	7	8	9
0	1,6094	1,7918	1,9459	2,0794	2,1972
1	2,7081	2,7726	2,8332	2,8904	2,9444
2	3,2189	3,2581	3,2958	3,3322	3,3673
3	3,5553	3,5835	3,6109	3,6376	3,6636
4	3,8067	3,8286	3,8501	3,8712	3,8918
5	4,0073	4,0254	4,0431	4,0604	4,0775
6	4,1744	4,1897	4,2047	4,2195	4,2341
7	4,3175	4,3307	4,3438	4,3567	4,3694
8	4,4427	4,4543	4,4659	4,4773	4,4886
9	4,5539	4,5643	4,5747	4,5850	4,5951
10	4,6540	4,6634	4,6728	4,6821	4,6913
11	4,7449	4,7536	4,7622	4,7707	4,7791
12	4,8283	4,8363	4,8442	4,8520	4,8598
13	4,9053	4,9127	4,9200	4,9273	4,9345
14	4,9767	4,9836	4,9904	4,9972	4,0039
15	5,0434	5,0499	5,0562	5,0626	5,0689
16	5,1059	5,1120	5,1180	5,1240	5,1299
17	5,1648	5,1705	5,1761	5,1818	5,1874
18	5,2204	5,2257	5,2311	5,2364	5,2417
19	5,2730	5,2781	5,2832	5,2883	5,2933
20	5,3230	5,3279	5,3327	5,3375	5,3423
21	5,3706	5,3753	5,3799	5,3845	5,3891
22	5,4161	5,4205	5,4250	5,4293	5,4337
23	5,4596	5,4638	5,4681	5,4723	5,4765
24	5,5013	5,5053	5,5094	5,5134	5,5175
25	5,5413	5,5452	5,5491	5,5530	5,5568
26	5,5797	5,5835	5,5872	5,5910	5,5947
27	5,6168	5,6204	5,6240	5,6276	5,6312
28	5,6525	5,6560	5,6595	5,6630	5,6664
29	5,6870	5,6904	5,6937	5,6971	5,7004

Verwandlung der Logarithmen.

und Gebrauch der nachstehenden Tafel.

Der kleinen Tabelle lässt sich durch einen gemeinen Logarithmus in einen natürlichen der natürliche in einen gemeinen Logarithmus ergibt sich aus dem man diesen mit der Zahl 0,434294 . . . , Modul des gemeinen Logarithmensystems; den natürlichen Logarithmus hingegen man den gemeinen Logarithmus durch dividirt, oder durch seinen reciproken . . . multipliziert. Der erste Theil der enthält die 1, 2, 3, 4 . . . 9fachen Werthe 0,3, 0,0230 u. s. w., und der zweite Theil . . . 9fachen Werthe von 0,43429, 0,04343,

Wie nun diese Vielfachen zur Verwandlung zu gebrauchen sind, werden folgende führen.

24,7 = 2,09587, so folgt

gegen 2	=	4,6052
„ 0,09	=	2072
„ 0,005	=	115
„ 0,0008	=	18
„ 0,00007	=	2

log. nat. 124,7 = 4,8259,

gefunden wurde.

log. nat. 996,7 = 6,9045, so folgt

gegen 6	=	2,60577
„ 0,9	=	39087
„ 0,004	=	174
„ 0,0005	=	22

der log. 996,7 = 2,9986.

Tafel zur Verwandlung der Logarithmen.

1. Gemeine Logarithmen in natürliche Logarithmen umzusetzen.

Gegebene Ziffern.	Für die Ganzen.	— Für die Dezimalziffern.				
		1	2	3	4	5
1	2,3026	0,2303	0,0230	0,0023	0,0002	0,0000
2	4,6052	0,4605	0,0461	0,0046	0,0005	0,0000
3	6,9078	0,6908	0,0691	0,0069	0,0007	0,0001
4	9,2103	0,9210	0,0921	0,0092	0,0009	0,0001
5	11,5129	1,1513	0,1151	0,0115	0,0012	0,0001
6	13,8155	1,3816	0,1382	0,0138	0,0014	0,0001
7	16,1181	1,6118	0,1612	0,0161	0,0016	0,0002
8	18,4207	1,8421	0,1842	0,0184	0,0018	0,0002
9	20,7233	2,0723	0,2072	0,0207	0,0021	0,0002

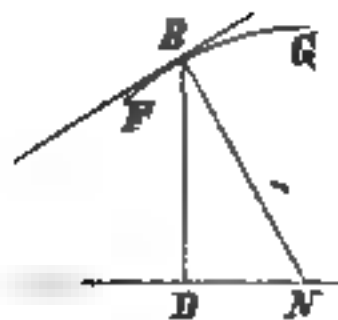
2. Natürliche Logarithmen in gemeine Logarithmen umzusetzen.

Gegebene Ziffern.	Für die Ganzen.	Für die Dezimalziffern.				
		1	2	3	4	5
1	0,43429	0,04343	0,00434	0,00043	0,00004	0,00000
2	0,86859	0,08686	0,00869	0,00087	0,00009	0,00001
3	1,30288	0,13029	0,01303	0,00130	0,00013	0,00001
4	1,73718	0,17372	0,01737	0,00174	0,00017	0,00002
5	2,17147	0,21715	0,02171	0,00217	0,00022	0,00002
6	2,60577	0,26058	0,02606	0,00261	0,00026	0,00003
7	3,04006	0,30401	0,03040	0,00304	0,00030	0,00003
8	3,47436	0,34744	0,03474	0,00347	0,00035	0,00003
9	3,90865	0,39087	0,03909	0,00391	0,00039	0,00004

Kurven.

Allgemeine Kurvenlehre.

Figur 25.



Ist für rechtwinklige Coordinaten $y = f x$,
so ist, Figur 25:

die Subtangente

$$D T = \frac{f x}{f' x} = \frac{y}{\left(\frac{d y}{d x}\right)},$$

die Tangente

$$\begin{aligned} B T &= \frac{f x}{f' x} = \sqrt{1 + (f' x)^2} \\ &= \frac{y}{\left(\frac{d y}{d x}\right)} \sqrt{1 + \left(\frac{d y}{d x}\right)^2}, \end{aligned}$$

$$\text{tang. } \alpha = \frac{y}{\text{subtang.}} = \frac{d y}{d x} = f' x.$$

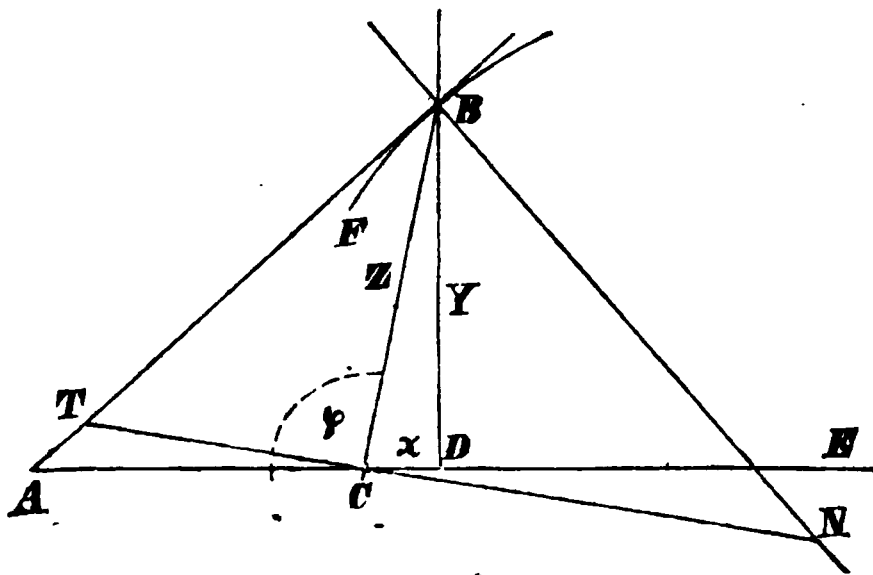
Die Subnormale.

$$DN = f'x \cdot f'x = y \cdot \frac{dy}{dx},$$

Die Normale.

$$\begin{aligned} BN &= f'x \sqrt{1 + (f'x)^2}, \\ &= y \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}. \end{aligned}$$

Figur 26.



Die Polargleichung.

$$z = f\varphi.$$

Ist für die Coordinatengleichung:

$CD = x$ und $DB = y$, Figur 26,

so ist:

$$\angle BCA = \varphi,$$

$$CB = z,$$

$$TN \perp CB.$$

Die Subtangente.

$$CT = z^2 : \frac{dz}{d\varphi},$$

$$\cot. CBT = \frac{dz}{d\varphi} : z.$$

Die Tangente.

$$BT = \frac{z}{\left(\frac{dz}{d\varphi}\right)} \sqrt{z^2 + \left(\frac{dz}{d\varphi}\right)^2}.$$

Die Subnormale.

$$CN = \frac{dz}{d\varphi}.$$

Die Normale.

$$BN = \sqrt{z^2 + \left(\frac{dz}{d\varphi}\right)^2}.$$

Ist $AD = x$, $BD = y$, $AE = a$, $EC = b$, BC der Krümmungshalbmesser $= r$, so ist, Figur 27:

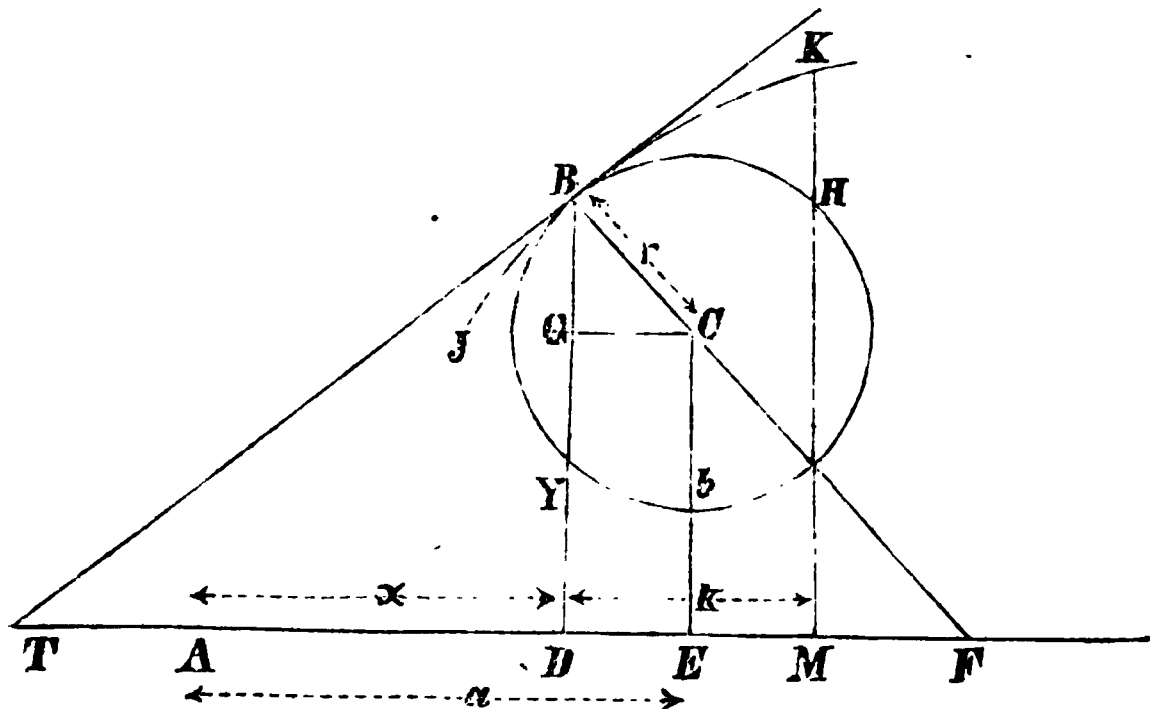
$$r = \pm \frac{\left[1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]^{\frac{3}{2}}}{\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)},$$

$$a = x - \frac{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}{\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)} \cdot \frac{dy}{dx},$$

$$b = y + \frac{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}{\frac{d^2y}{dx^2}}.$$

Eine Gleichung zwischen a und b also, ohne x und y , und deren Differentiale gibt für jede besondere Kurve die Gleichung für die Evolute.

Figur 27.



Für $r = \pm \infty$ erhält man x und y entweder für einen Wendepunkt oder eine Spitze; einen Wendepunkt, wenn sowohl für $x + x'$ als auch $x - x'$ mögliche Grössen für x entstehen, eine Spitze, wenn für $x + x'$ oder für $x - x'$, y unmöglich wird.

Rektifikationsformel.

Länge des Bogens:

$$\lambda = \int \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} dx + \text{Const.}$$

formel.

venstücke, den beiden End-
ecke eingeschlossenen Ebene:

+ Const.

iche,

ines Kurvenstückes um die

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 dx + \text{Const.}$$

formel.

en einer krummen Oberfläche
flächen:

+ Const.,

fläche ist.

der

ve um die Abscissenaxe, von
hlossen:

$x + \text{Const.}$

reis.

Figur 28:

$$= r^2,$$

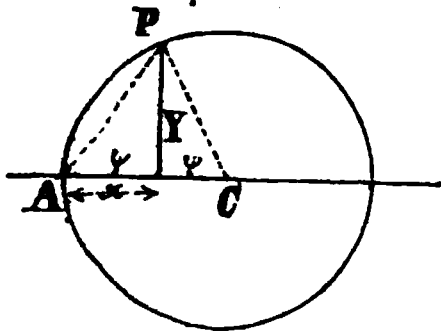
$$\left(\frac{y}{r}\right)^2 = 1.$$

Daraus:

$$y = \sqrt{r^2 - x^2}.$$

II. Scheitelgleichung aus A:

Figur 28.



$$y^2 = x (2r - x),$$

daraus:

$$y = \sqrt{x (2r - x)},$$

$$x = r - \sqrt{r^2 - y^2},$$

$$r = \frac{1}{2} \left(x + \frac{y^2}{x} \right) = \frac{x^2 + y^2}{2x}.$$

Ferner ist:

$$\text{tang. } \frac{\varphi}{2} = \frac{x}{y},$$

$$r = \frac{y}{\sin. \varphi}.$$

Bezeichnet z die Sehne A B, so ist:

$$z = 2r \cos. \psi,$$

$$z^2 = 2rx,$$

$$\pi = 3,14159265359,$$

$$\log. \pi = 0,4971499.$$

$57^\circ 17\frac{3}{4}'$ ist der dem Radius gleiche Kreisbogen.
Bogenlänge und Inhalt siehe Längen- und Flächentafel.

Die Ellipse.

Grosse Halbaxe = a; kleine Halbaxe = b.

I. Mittelpunktsgleichung, Figur 29:

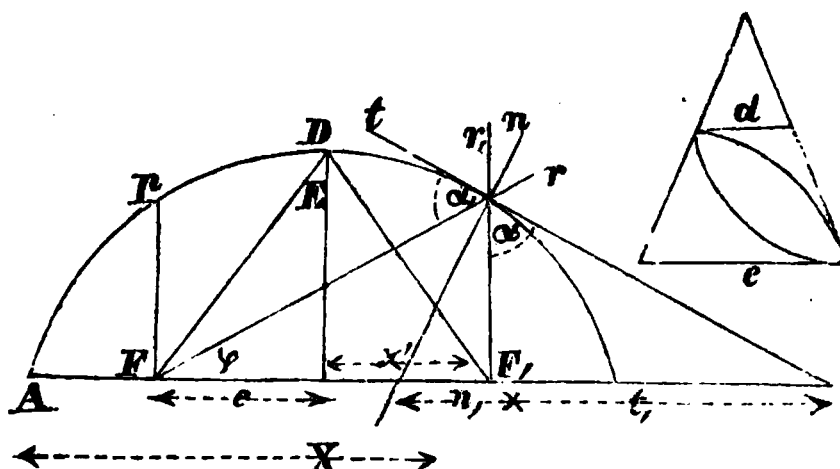
$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1; y^2 = \frac{b^2}{a^2} (a^2 - x^2).$$

II. Polargleichung aus F:

$$r = p + ex = \frac{p}{1 - e \cos. \varphi},$$

· worin $\varphi < 1$.

Figur 29.



III. Gleichung aus A:

$$y^2 = \frac{b^2}{a^2} (2ax - x^2) = \frac{cd}{4a^2} (2ax - x^2),$$

$$y = \frac{b}{a} \sqrt{2ax - x^2}.$$

Exzentrizität:

$$e = \sqrt{a^2 - b^2} = a \sin. E.$$

Sind F und F' die Brennpunkte, so ist:

$$FD = F, D = a.$$

Die Ordinate in F ist:

$$p = a \left(1 - \frac{e^2}{a^2} \right) = \frac{b^2}{a},$$

Parameter

= 2 p,

Radiusvektor: $r = (a^2 + e x_1) \cdot \frac{1}{a},$

$$r_1 = (a^2 - e x_1) \cdot \frac{1}{a},$$

$$r + r_1 = 2a,$$

$$r = \frac{b^2}{a + e \cos. \varphi}.$$

Länge der Tangente: $t = \frac{a y}{b x_1} \sqrt{a^2 - e^2 x_1^2},$

„ „ Subtang.: $t_1 = \frac{a^2}{x_1} - x_1,$

„ „ Normale: $n = \frac{b}{a} \sqrt{a^2 - e^2 x_1^2},$

„ „ Subnorm.: $n_1 = \frac{b^2}{a^2} x_1.$

Krümmungshalbmesser: $\varrho = \frac{(r r_1)^{3/2}}{a b}.$

Für Punkt A ist: $\varrho_1 = \frac{b^2}{a},$

„ „ D „ $\varrho_2 = \frac{a^2}{b}.$

n halbiert den \sphericalangle zwischen r und r_1 , t bildet mit r und r_1 die gleichen \sphericalangle α und α_1 .

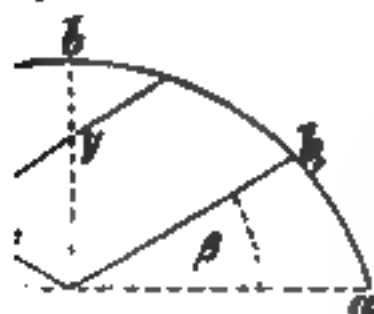
Conjugirte Durchmesser (a , und b ,) sind solche, für welche als Coordinatenachsen die Gleichung der Ellipse:

$$\frac{x_1^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

wird.

. Enden eines conjugirten
.. (Figur 30).

Figur 30.



Es folgt:

$$\frac{1}{2} (a^2 + x^2).$$

$$= a^2 + b^2,$$

$$(\alpha + \beta) = a b,$$

$$\text{tang. } \alpha \text{ tang. } \beta.$$

mit der grossen E
s beschriebenen Kreise

$$= a : b.$$

Die Ordinaten zu den I
messer sind, so ist:

$$x^2 = a^2,$$

$$y^2 = b^2,$$

$$= x : y.$$

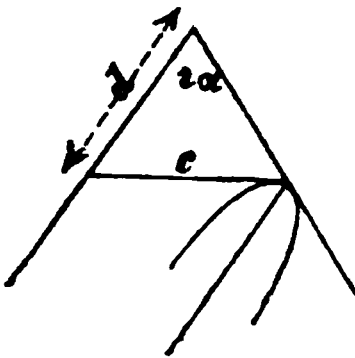
Längen und Inhalt siehe „Längen- und Fl

Die Parabel. (Figur 31 und 32.)

Parameter:

$$p = \frac{c^2}{d} = 2c \sin. \alpha.$$

Figur 31.



Scheitelgleichung: $y^2 = px,$

$$\begin{aligned} \text{Polargleichung: } r &= x + \frac{p}{4}, \\ &= \frac{1/2 p}{1 + \cos. \varphi}. \end{aligned}$$

Gleichung für x, y , als Axen:

$$y^2 = px,$$

oder:

$$y^2 = \frac{p}{\sin. \alpha^2} \cdot x = \frac{4z^2 + p^2}{p} x.$$

Wenn F der Brennpunkt, so ist:

$$n = \frac{p}{4}; m = \frac{p}{2};$$

Trägt man an eine Abscisse x den Parameter $p = NM$ an und beschreibt einen Halbkreis über AM , so ist dessen Radius:

$$R = y.$$

$$\text{Länge der Tangente: } = \sqrt{4x^2 + y^2},$$

$$,, \quad ,, \quad \text{Subtang.: } = \frac{2y^2}{p} = 2x,$$

$$,, \quad ,, \quad \text{Normale: } = \sqrt{1/4 p^2 + y^2},$$

$$,, \quad ,, \quad \text{Subnorm.: } = 1/2 p.$$

$$\sphericalangle \alpha = \sphericalangle \alpha,,$$

$$\text{tang. } \alpha = \frac{p}{2y} = \frac{y}{2x}.$$

ungshalbmesser:

$$e = \sqrt{\frac{(4x + p)^2}{4p}}.$$

n Scheitel A:

$$e = \frac{1}{2}p \cdot \frac{p}{2}$$

en des Mittelpunktes vom Krümmungskreise:

$$x = 3x + \frac{1}{2}p,$$

$$y = \frac{4x^2}{y}.$$

linie Y Y steht \perp auf X X. Ihr Abstand von
st:

$$= \frac{p}{4}.$$

st:

$$v = r = x + \frac{p}{4}.$$

t der Axe X X \parallel Durchmesser X, X, halbiert alle
gente Y, \parallel Sehnen.

inge A D:

$$x \sqrt{y^2 + 4x^2} + y^2 \ln \frac{2x + \sqrt{y^2 + 4x^2}}{y}$$

$$x(p + 2x) + \frac{p}{2} \ln \left(\sqrt{\frac{2x}{p}} + \sqrt{1 + \frac{2x}{p}} \right).$$

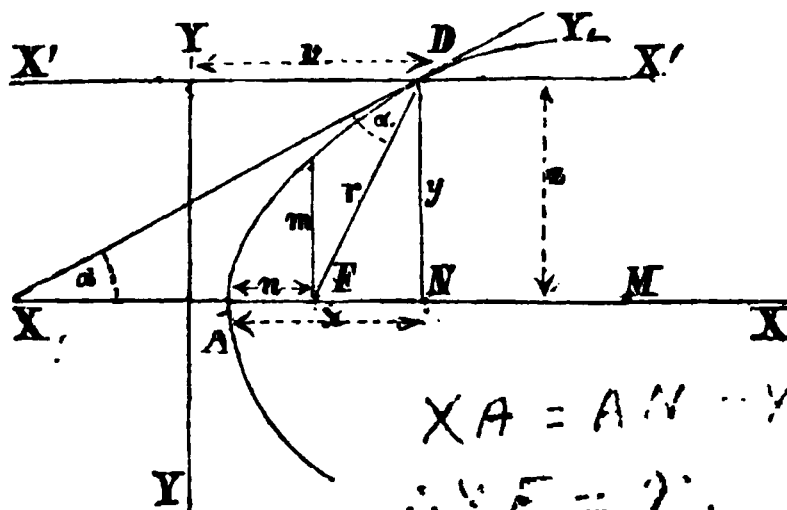
$\frac{x}{y}$ ein kleiner Bruch annähernd:

$$= y \left[1 + \frac{2}{3} \left(\frac{x}{y} \right)^2 - \frac{2}{5} \left(\frac{x}{y} \right)^4 \right].$$

$$\frac{\sqrt{y^2 + 4x^2}}{y} = \frac{p}{2} \log \left(\frac{1 + \sqrt{1 + \frac{2x}{p}}}{\frac{p}{y}} \right).$$

Die übrigen Längen, Flächen und körperlichen Inhalte
siehe „Längen-, Flächen- etc. Tafeln“.

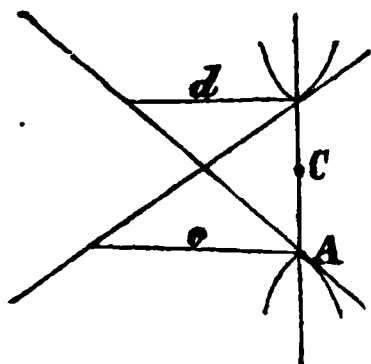
Figur 32.


$$XA = AN - Y = I - \frac{1}{n}J$$

$$\therefore XF = I.$$

Die Hyperbel. (Figur 33 und 34.)

Figur 33.



Scheitelgleichung von A:

$$y^2 = \frac{cd}{4a^2} (2ax + x^2),$$

oder: $y^2 = -\frac{b^2}{a^2}(2ax + x^2)$

und: $y = \frac{b}{a} \sqrt{2ax + x^2}.$

Mittelpunktsgleichung von C:

$$y^2 = \frac{b^2}{a^2} (x^2 - a^2),$$

oder:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Polargleichung von F:

$$r = \frac{b^2}{a + e \cos. \varphi},$$

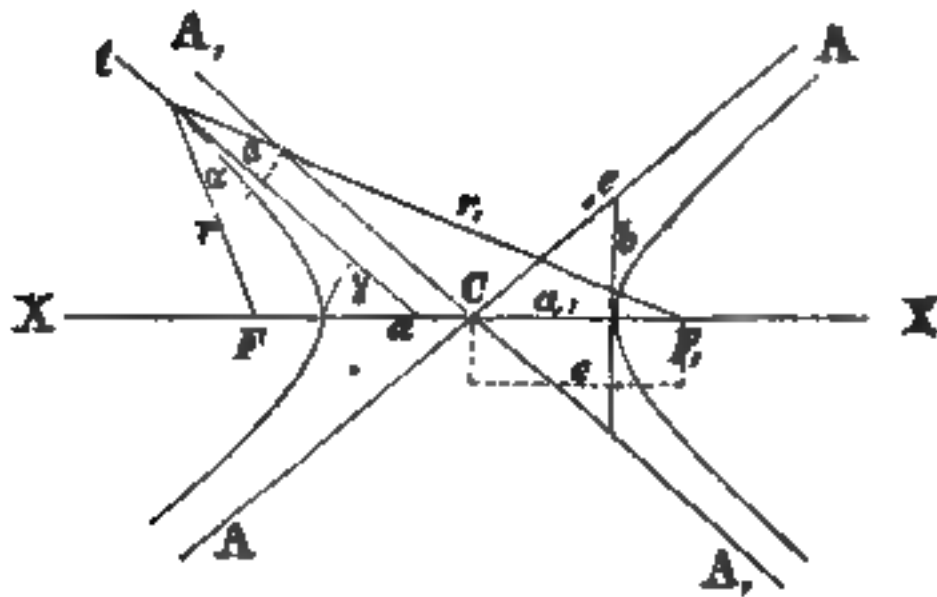
$$e = \sqrt{a^2 + b^2},$$

$$b^2 = \frac{cd}{4},$$

$$r = \frac{ex_1}{a} - a; r_1 = \frac{ex_1}{a} + a,$$

$$r_1 - r = 2a.$$

Figur 84.



Krümmungshalbmesser:

$$\rho = \frac{(r r_1)^{3/2}}{a b},$$

Im Scheitel:

$$\rho = \frac{b^2}{a}.$$

Die Tangente t halbiert den \angle zwischen r und r, daher:

$$\angle \alpha = \angle \beta.$$

Der Winkel α , den die Asymptoten A und A, mit der Axe X bilden, ist bestimmt durch die Gleichung:

$$\text{tang. } \alpha, = \frac{b}{a}.$$

Bei der gleichseitigen Hyperbel ist:

$$b = a \text{ und tang. } \alpha, = 1,$$

$$\alpha, = 45^\circ.$$

Bezieht man die Hyperbel auf ihre Asymptoten und bezeichnet die Abscissen mit u, die Ordinaten mit v, so ist:

$$u \cdot v = \frac{a^2 + b^2}{4} = \frac{1}{4} e^2 = p^2.$$

p heisst die Potenz der Hyperbel.

$$\text{Länge der Tangente } t: = \frac{y}{b x,} \sqrt{e^2 x,^2 - a^4},$$

$$\text{,, ,, Subtangente: } = \frac{x,^2 - a^2}{x,},$$

$$= \frac{2 a x + x^2}{a + x},$$

$$= \frac{a^2 y^2}{b^2 x,},$$

$$\text{,, ,, Normale: } = \frac{b}{a^2} \sqrt{e^2 x,^2 - a^4},$$

$$\text{,, ,, Subnormale: } = \frac{b^2}{a^2} x, = \frac{b^2}{a^2} (a + x).$$

Für den von t mit X X gebildeten $\angle \gamma$ ist (Figur 35):

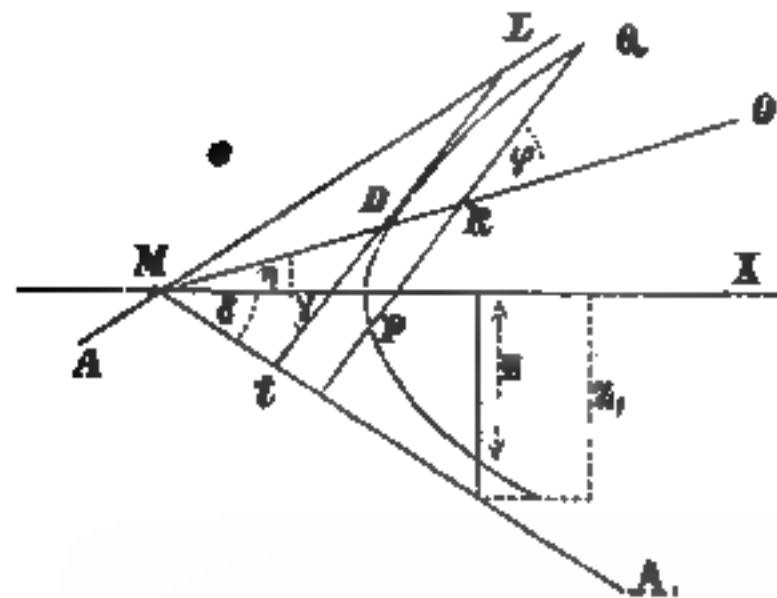
$$\text{tang. } \gamma = \frac{b^2 \cdot x,}{a^2 y} = \frac{b^2}{a^2 y} (a + x),$$

Mittelpunkt des Krümmungskreises sind die
telpunkt der Hyperbel bezogenen Coordinaten:

$$\text{Abscisse} = \frac{a^2 + b^2}{a^2} \cdot x^2,$$

$$\text{Ordinate} = \frac{a^2 + b^2}{b^2} \cdot y^2.$$

Figur 35.



urch den Mittelpunkt M der Hyperbel gezogene
ist ein Durchmesser derselben und jede mit
e D t || Sehne P Q wird durch den Durchmesser
rt.

igente D t bis zu den Asymptoten verlängert,
den Berührungspunkt D halbiert.

$$x = x,; MR = u,; RQ = RP = y,;$$

$$MD = a,; DL = e,,$$

$$y^2 = \frac{e^2}{a^2} u^2 - e^2,$$

$$y,^2 = \frac{e,^2}{a,^2} (u,^2 - a,^2),$$

$$y,^2 = \frac{e,^2}{a,^2} (2a, x, + x,^2).$$

MD und **DL** sind coordinirte Durchmesser.
für jeden Punkt der Hyperbel, wie **D**:

$$a, c, \sin. \varphi = a, c, \sin. (\gamma - \eta) = a b,$$

$$a,^2 - e,^2 = a^2 - b^2,$$

$$\text{tang. } \eta = \frac{b^2}{a^2} \cot. \gamma.,$$

$$\text{tang. } \varphi = \frac{a^2 \sin. \gamma^2 - b^2 \cos. \gamma^2}{(a^2 + c^2) \sin. \gamma \cos. \gamma}.$$

Verlängert man eine Ordinate **z** bis in die Asy
A, so ist:

$$z,^2 - z^2 = b^2,$$

oder:

$$z, - z = \frac{b^2}{z' + z} = \frac{a b}{x + \sqrt{x^2 - a^2}}$$

Flächen- und Körperräume siehe die betre
Tafeln.

Die Cycloide. (Figur 36.)

Gleichung von **A** aus:

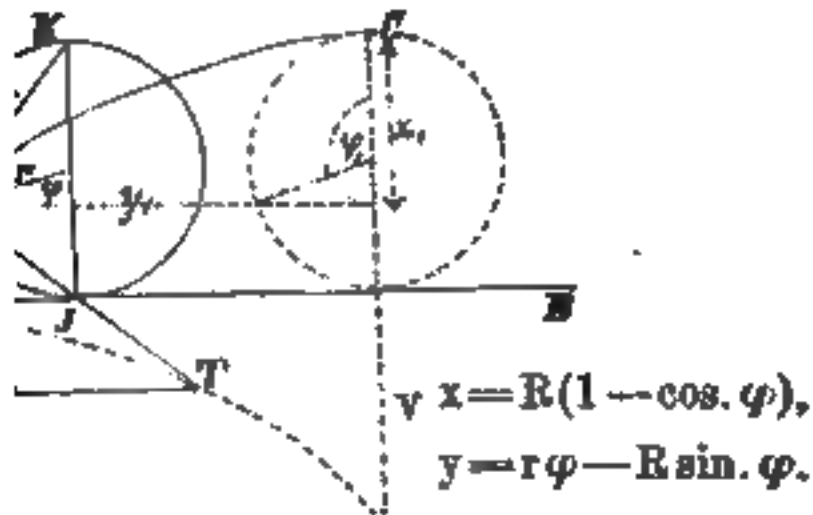
$$y = r \text{ arc. } \left(\cos. = \frac{r - x}{r} \right) - \sqrt{2rx - x^2}.$$

Gleichung von **C** aus:

$$y, = r \text{ arc. } \left(\cos. = \frac{r - x,}{r} \right) + \sqrt{2rx, - x,^2}.$$

für Punkt L findet man, indem man

Figur 36.



halbmesser für L ist:

$$4r \sin. \frac{\varphi}{2} = 2 LJ,$$

$$e = 0,$$

$$e = 4r.$$

ie Evolute der Cycloide:

$$s. = \frac{r - v}{r} + \sqrt{2rv - v^2}.$$

daher mit der Cycloide congruent.

n- und Körperräume siehe die Tabelle.

zte Cycloide. (Figur 37.)

kreis, c der beschreibende Punkt in

aus:

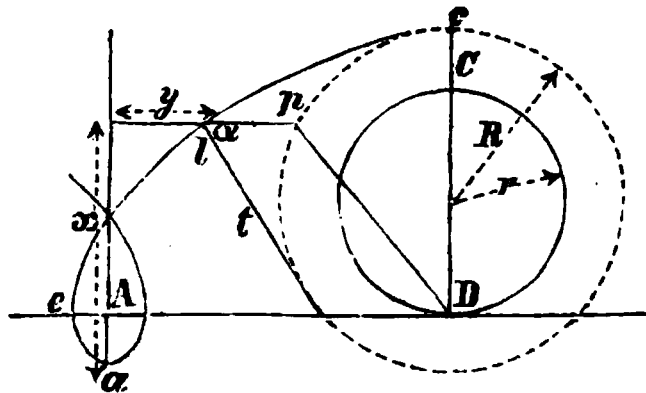
$$\cos. \frac{R - x}{R} = \sqrt{2Rx - x^2}.$$

Die Normale t für Punkt l ist $\parallel p D$.

Krümmungshalbmesser:

$$\rho = \frac{(R^2 + r^2 - 2 r R \cos. \alpha)^{3/2}}{R (R - r \cos. \varphi)}.$$

Figur 37.



Für Punkt c :

$$\overline{Ae} = -r\varphi + R \sin. \varphi,$$

$$\rho = \frac{(R + r)^2}{R},$$

Für Punkt a :

$$\overline{Aa} = R - r,$$

$$\rho = \frac{(R - r)^2}{R}.$$

Für Punkt e :

$$\cos. \varphi = \frac{r}{R}.$$

$$\rho = \sqrt{R^2 - r^2}.$$

Die gestreckte Cycloide. (Figur 38.)

CD der erzeugende Kreis, c der beschreibende Punkt in der Axe, Dt Tangente an Kreis cd :

$$x = r - r \cos. \varphi$$

$$y = r\varphi - r \sin. \varphi.$$

Hypocycloide. (Figur 39.)

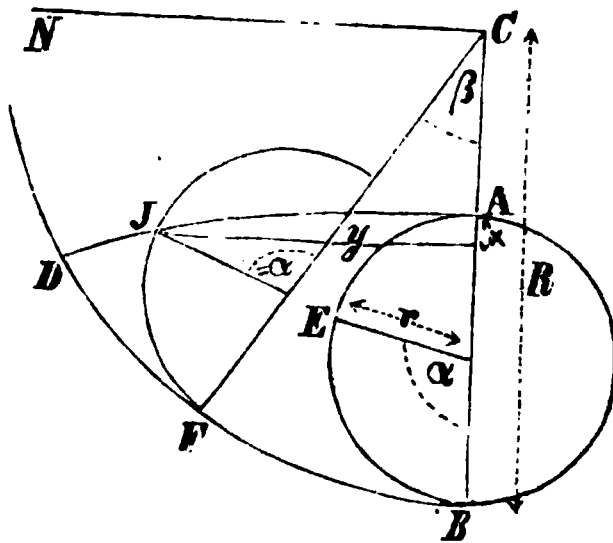
BD sei der Grundkreis, AB der Erzeugungskreis, α der Wälzungswinkel und Bogen $EB = FB$, so ist:

$$\mathbf{r} \alpha = \mathbf{R} \beta,$$

$$\mathbf{x} = (\mathbf{R} - \mathbf{r}) \cos. \beta - \mathbf{r} \cos. (\alpha - \beta) = (\mathbf{R} - 2\mathbf{r}),$$

$$y = (R - r) \sin. \beta - r \sin. (\beta - \beta).$$

Figur 39.



Für $2r = R$ entsteht für jeden Werth von α :

$$x = 0; y = 2r \sin. \frac{\alpha}{2},$$

d. h., die Hypocycloide wird eine Gerade CN , die mit BC normal ist.

Die Epicycloide. (Figur 40.)

Ist BD der Grundkreis, AEB der Erzeugungskreis,
Bogen $BD = AEB$, Bogen $BF = BE = HJ$, so ist:

$$\mathbf{x} = \mathbf{R} + 2\mathbf{r} - (\mathbf{R} + \mathbf{r}) \cos. \psi - \mathbf{r} \cos. (\varphi + \psi),$$

$$= (R + r) \sin. \psi + r \cos. (\varphi + \psi),$$

$$\psi = \frac{r}{R} \varphi,$$

$$-(R+r) \cos. \frac{r}{R} \varphi - r \cos. \frac{R+r}{R} \varphi.$$

$$\text{n. } \frac{r}{R} \varphi + r \cos. \frac{R+r}{R} \cdot \varphi.$$

Der Δ , den die Tangente OJ in J mit der Abscisse AC bildet, ist:

$$= \frac{\pi}{2} - \left(\psi + \frac{1}{2} \varphi \right),$$

daher die Sehne HJ zugleich
die Tangente.

Länge der Subtangente:

$$= \text{tang.} (\psi + \frac{1}{2} \varphi).$$

Länge der Subnormale:

$$= y \cot. (\psi + 1/2 \varphi).$$

Krümmungshalbmesser bei J:

$$\varphi = 4r \cdot \frac{R+r}{R+2r} \cos. \frac{\varphi}{2}.$$

Ist MN die Kreistangente
in J , so ist:

$$\text{FJN} \approx \text{HJO}, \approx \frac{\pi - \varphi}{2}.$$

$$J = 4 \frac{r}{R} (R + r) \sin \frac{\varphi}{2},$$

$$\pi, \text{ ist } A J D = 4 \frac{r}{R} (R + r).$$



Die Evolvente. (Figur 41.)

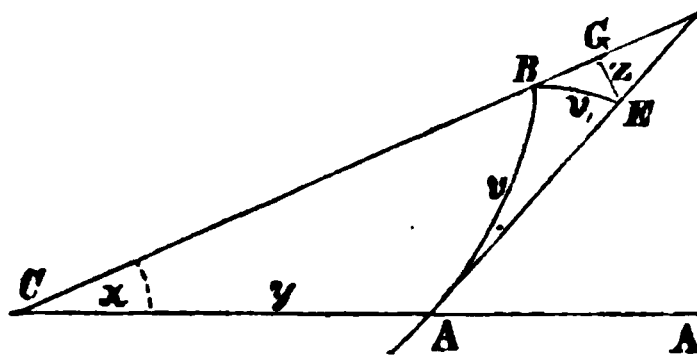
Ist AB das Stück einer beliebigen Kurve, deren Gleichung vom Pol C aus:

$$y = \varphi x,$$

AC die Polaxe $\angle ACB = x$, die Abscisse $= BC$ und y die Ordinate, so ist die Länge:

$$AB = v = \int \sqrt{y^2 + (dy)^2} dx,$$

Figur 41.



Ist BE die Evolvente von AB , also AE die Tangente in $A = v$, die Normale EG auf $CB = z$; $CG = u$, so ist:

$$u = y \cos. x + v \sin. x,$$

$$z = y \sin. x - v \cos. x,$$

die Länge:

$$BE = v, = \int v dx,$$

der Raum:

$$ABE = \frac{1}{2} \int v^2 dx.$$

Ist AB ein Kreisbogen, so ist für jedes x :

$$AC = r$$

und:

$$AB = v = rx,$$

daher die Länge der Evolvente:

$$AE = \int rx dx = \frac{1}{2} rx^2,$$

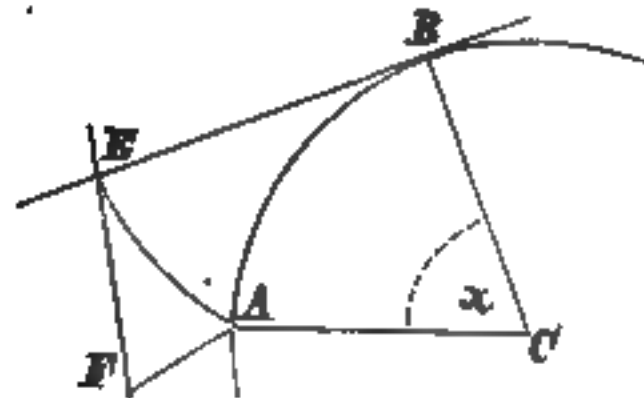
3 Tangente:

$$B E = \text{Bogen } A B = r x$$

kelt man weiter A E von A aus ab, so ist, wenn Tangente in E und $= A E$ ist, Bogen:

$$A F = \int \frac{1}{2} r x^2 = \frac{1}{6} x^3 r. \quad (\text{Figur 42.})$$

Figur 42.



$$\text{Ebene: } A B C = \frac{1}{2} \int (r x)^2 = \frac{1}{6} r^2 \cdot x^3,$$

$$\text{Ebene: } A E F = \frac{1}{2} \int \left(\frac{1}{6} r^2 x^3 \right) = \frac{1}{40} r^2 x^5.$$

3 Konchoide oder Muschellinie. (Figur 43.)

stellung. Man ziehe $x' x$ und B C senkrecht zu mache A B und A D $= a$, ziehe die beliebige Linie mache B Q $= R N = a$, so sind N und Q Kurven-

$$P R = \frac{x y}{b + y}; \quad M R = \frac{x' y}{b - y}$$

$$P Q^2 + P R^2 = Q R^2,$$

$$M N^2 + M R^2 = N R^2,$$

also:

$$y^2 + \frac{x^2 y^2}{(b+y)^2} = a^2$$

und:

$$y^2 + \frac{x'^2 y^2}{(b-y)^2} = a^2.$$

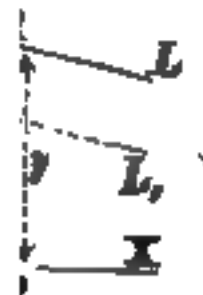
Gleichung für die obere Konchoide:

$$y^4 + 2by^2 + (x^2 + b^2 - a^2)y^2 - 2a^2by - a^2b^2 = 0,$$

für die untere:

$$y^4 - 2by^2 + (x^2 + b^2 - a^2)y^2 + 2a^2by - a^2b^2 = 0.$$

Figur 48.



Liegt c in D, so hat man für beide Kurven:

$$y^4 \pm 2ay^2 + x^2 y^2 \mp 2a^2 y - a^4 = 0.$$

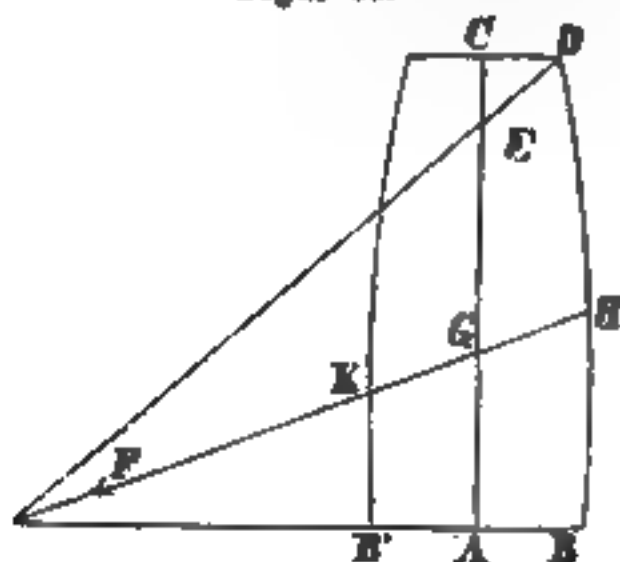
Man erhält dann die Kurven:

K, B und D E'.

Liegt der Pol c in C', so entsteht B L' und D C' F' und bei C' ein Knoten.

er obere, $A B$ der untere Radius einer Säule,
 n $D E = A B$ und ziehe $F E D$. Für jede
 H mache man $G H = K G = D E$. (Figur 44.)

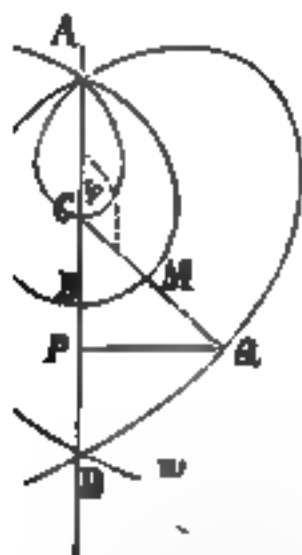
Figur 44.



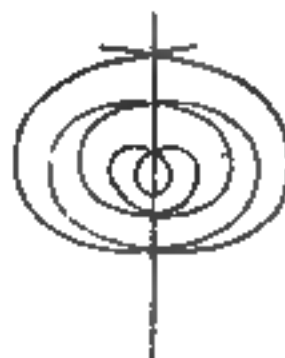
Neoide. (Figur 45 und 46.)

ing. Man theilt den Halbkreis $A M B$ in
 e und die Linie $B D$ gleichfalls in n gleiche

Figur 45.



Figur 46.



Q beliebig und macht $M Q$ ebensoviel Theile
 als der Bogen $A M$ Theile enthält. Es muss
 Proportion stattfinden:

arc. A M : arc. A M B = M Q : B D,
also C Q stets gleich sein:

$$r + \frac{a \varphi}{\pi}.$$

Es ist also:

$$\mathbf{CP} = \mathbf{x} = \left(\mathbf{r} + \frac{a\varphi}{\pi} \right) \cos. \varphi,$$

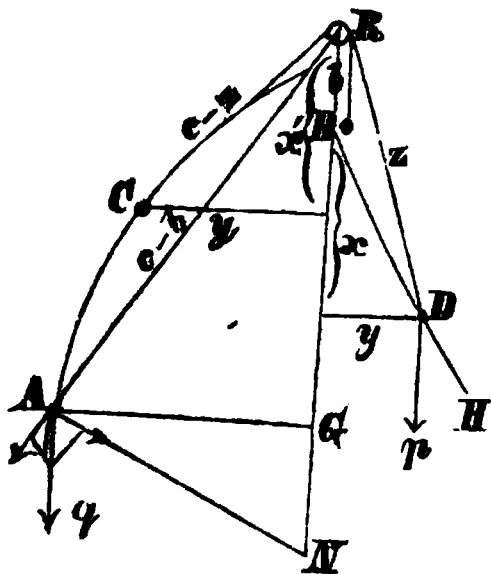
$$PQ = y = \left(r + \frac{a\varphi}{\pi} \right) \sin. \varphi.$$

Die Neoide bildet auf der, unbegrenzten Gerade A D unendlich viele Knoten.

Die Gleichgewichtskurve. (Figur 47 und 48.)

A R sei die 'gegebene Kurve, ihre Gleichung sei $y' = f(x')$, B H die gesuchte Gleichgewichtskurve, x und

Figur 47.



y ihre Coordinaten, RN Abscissenaxe, AN Normale, GN Subnormale $= n$, RG halbe Axe $= a$, die Länge des Fadens $= c$, das Stück RB desselben $= b$, g die Last, p die Kraft.

Wenn g bei A steht und p bei B hängt, so ist:

$$p = \frac{c - b}{a + n} \cdot g.$$

Es sei nun eine Bewegung erfolgt und g daher bei C, p bei D, so ist der Weg der Last

$$= a - x',$$

und der Weg der Kraft $= x$, also:

$$\frac{a+n}{c-b} (a-x') \text{ und } x' = a - \frac{c-b}{a+n} x,$$

ire:

$$y^2 = z^2 - (x+b)^2,$$

$$(c-z)^2 = x'^2 + y'^2.$$

an hieraus z , so erhält man:

$$y^2 = (c - \sqrt{x'^2 + y'^2})^2 - (b+x)^2.$$

irt man den Werth von x , so kommt:

$$\sqrt{(c - \sqrt{x'^2 + y'^2})^2 - \left(b + \frac{a+n}{c-b} (a-x')\right)^2}.$$

it also folgende Bestimmungsgleichungen:

$$\frac{c-b}{a+n} = g.$$

$$\frac{a+n}{c-b} (a-x').$$

$$\sqrt{(c - \sqrt{x'^2 + y'^2})^2 - \left(b + \frac{a+n}{c-b} (a-x')\right)^2}.$$

$f(x')$.

ewichtskurve für eine Kreisquadrate. Hiefür ist:

$$0, c-b = a \sqrt{2}, \quad \frac{a+n}{c-b} = \frac{1}{2} \sqrt{2},$$

$$= 2 a x' - x'^2, \text{ also } y'^2 + x'^2 = 2 a x'.$$

itution in die allgemeine Gleichung erhält man:

$$g \sqrt{2},$$

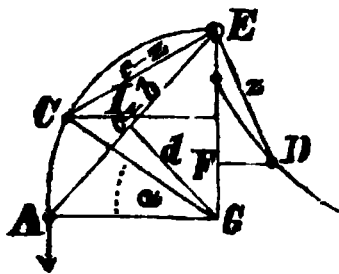
$$\frac{1}{2} (a-x') \sqrt{2},$$

$$\sqrt{(c - \sqrt{2 a x'})^2 - [b + \frac{1}{2} (a-x') \sqrt{2}]^2}.$$

Will man eine Gleichung unter x und y , so drücke man x' in Funktion von x aus, dann ist:

$$\text{IV. } y = \sqrt{\left(c - \sqrt{2a^2 - 2ax\sqrt{2}}\right)^2 - (b+x)^2}.$$

Figur 48.



Will man die Gleichung durch Kreisfunktionen ausdrücken, so ziehe man das Perpendikel d von G auf E A, so hat man:

$$d = \frac{1}{2} a \sqrt{2}$$

und wenn α den Erhebungswinkel der Last g bezeichnet, so ist:

$$a \rightarrow x' = a \sin. \alpha$$

und:

$$\text{I. } x = \frac{1}{2} a \sqrt{2} \sin. \alpha = d \sin. \alpha,$$

$$\text{II. } y = \sqrt{(c - a\sqrt{2} \cos. \alpha)^2 - (b + \frac{1}{2} a\sqrt{2} \sin. \alpha)^2}.$$

Mittelst der Formel:

$$d \sin. \alpha = x$$

und der Grösse z lässt sich $\triangle ETD$ und mithin die ganze Kurve leicht konstruiren.

Die Kurve ist eine Epicycloide.

Logarithmische Linie. (Figur 49.)

Logarithmische Linie ist jede Kurve, deren Ordinaten eine geometrische Reihe bilden, während die Abscissen nach einer arithmetischen Reihe fortschreiten. Für die Abscissen $a, 2a, 3a$ u. s. w. sind die Ordinaten:

$$b, c, \frac{c^2}{b}, \frac{c^3}{b^2} \dots$$

ing von A aus, wenn $\mathbf{x} = \mathbf{u} \mathbf{a}$:

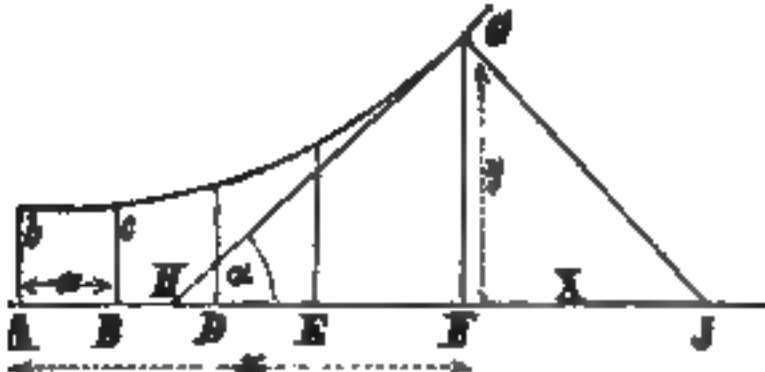
$$y = \frac{c^u}{b^{u-1}} = b \left(\frac{c}{b} \right)^{\frac{x}{a}} \rightarrow$$

= 1 ist:

$$Y = C^R; \quad Y^* = C^I;$$

$$a \log. y = x \log. c;$$

$$a : x = \log. c : \log. y.$$

Figur 48:

H die Tangente in **G**, so ist:

$$\text{tang. } \alpha' = y \frac{\ln \cdot c}{a}$$

$$\text{mg.: FH} = \frac{a}{\ln \cdot c}$$

constant für jeden Punkt der Kurve).

$$\text{erg.}: FJ = y^2 \frac{\ln \cdot e}{2}.$$

en Mittelpunkt der Krümmung:

$$\text{Isso: } x_1 = x - \frac{a^2 - y^2 (\ln c)^2}{a \ln c}$$

$$\text{Ordinate: } y_1 = y + \frac{a^2 + y^2 (\ln \cdot c)^2}{y (\ln \cdot c)^2},$$

$$\text{Halbmesser: } \rho = \frac{[a^2 + y^2 (\ln \cdot c)^2]^{3/2}}{y (\ln \cdot c)^2}.$$

Spirallinie. (Figur 50.)

Hat eine Kurve die Coordinatengleichung:

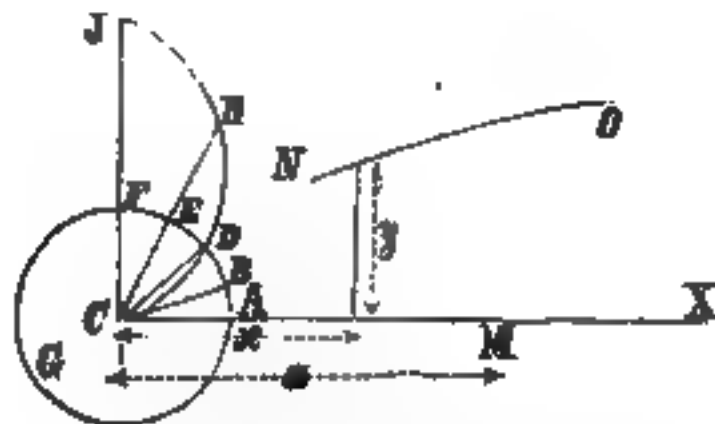
$$y = \varphi x,$$

ist C der Anfangspunkt der Abscissen, ist um C F G mit dem Halbmesser = 1 beschrieben und A aus die Bogen:

$$A B, A D, A E, A F = 2 \pi \frac{\varphi x}{\varphi a}$$

abgetragen, so erhält man die Spirale, wenn i eine beliebige Länge C M annimmt, für x nach

Figur 50.



die Werthe 0, 1, 2, 3 u. s. w. einsetzt, auf de C B, C D, C E u. s. w. die Längen C = 0, C H = 2, C J = 3 als die jedesmaligen Werthe trägt, und die Punkte C D H J verbindet.

Namen nach der erzeugendem
 φx .

$$\frac{\varphi a}{\varphi a} = 2\pi.$$

nze Windung gemacht und es
 ; von:

$$x = 2a \text{ u. s. w.}$$

che Spirale.

st die gerade Linie:

$$= b + cx,$$

$$\frac{cx}{ca} = 2\pi.$$

durch den Anfangspunkt C,

$$v = \frac{2x}{a} \pi.$$

$$+ \frac{(b + ca)}{2\pi c} v.$$

mit der Neide.

che Spirale.

st die logarithmische Linie:

$$x = c^{\frac{x}{a}},$$

also für die Spirale:

$$v = \frac{\frac{x}{c^a}}{\frac{a}{c^a}} 2\pi = 2\pi \frac{\frac{x}{c^a}}{c}$$

und:

$$\frac{x}{c^a} = \frac{c}{2\pi} \cdot v,$$

oder:

$$\ln \frac{v}{2\pi} = \frac{x}{a}.$$

Damit v nicht als log. gegeben wird, vertausche man x mit y , so ist:

$$x = c^{\frac{y}{a}},$$

$$\frac{y}{a} \log. c = \log. x,$$

woraus:


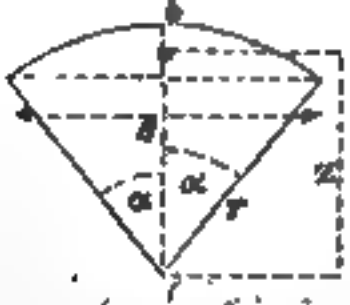

$$y = \varphi x = a \frac{\log. x}{\log. c},$$

mithin:

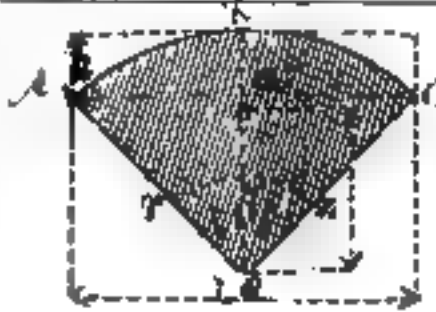
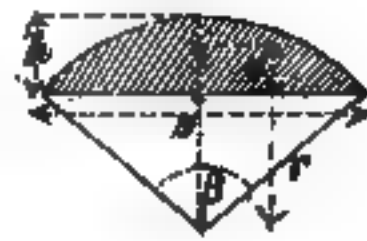
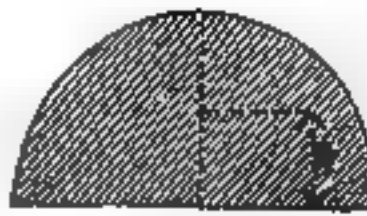
$$\begin{aligned} v &= \frac{a \frac{\log. x}{\log. c}}{a \frac{\log. c}{\log. c}} \cdot 2\pi \\ &= \frac{\log. x}{\log. c} \cdot 2\pi. \end{aligned}$$



Flächen-, Schwerpunkts- und Längen-T

Form.	Flächeninhalt F.
	Null,
	Null,
	$F = r^2 \pi = 3,14159 r^2$ $r = 0,5642 \sqrt{F},$
	$F = F_1 = \frac{2}{3} x y,$

Schwerpunktslage.	Länge.
$z = \frac{b + c}{a + b + c} \cdot \frac{h}{2}$	$\text{Umfang} = a + b + c.$
<p>Abstand vom Kreismittelpunkt:</p> $z = \frac{r s}{b} = \frac{r \sin. \alpha}{\alpha}$ <p>$z = \frac{6r}{36} = 0,1666 r$</p>	<p>Wenn der Centriwinkel $= \beta^\circ$ ist, so ist der Bogen:</p> $b = 0,017453 \beta^\circ r.$
Schwerpunkt im Centrum	<p>Umfang:</p> $= 2 r \pi = 6,28319 r.$
$z = \frac{8}{5} x,$ $z, = \frac{8}{5} y$	<p>Bogen P A Q bei gedrückter Form — annähernd:</p> $= 2 y \left[1 + \frac{8}{5} \left(\frac{x}{2 y} \right)^2 \right]$ <p>vide Kurven. $\frac{1}{2} 116$</p>

	Form.	Flächeninhalt.
Reguläres n Eck.		$F = \frac{1}{4} n s^2 \cot. \frac{180}{n},$ $F = n \cdot \frac{s h}{2}.$
	Irreguläres n Eck.	Man zerlege die Figur in Dreiecke, Trapeze etc., be- rechne deren Inhalt und summiere ihn.
○ Ausschnitt.		$F = r^2 \frac{\beta}{2},$ $F = 0,008727 r^2 \beta^{\circ}.$
○ Abschnitt.		$F = \frac{r^2}{2} (\beta - \sin. \beta),$ $F = \frac{r^2}{2} (0,017453 \beta^{\circ} - \sin. \beta).$
Halbkreis.		$F = 1,57080 \cdot r^2.$

Schwerpunktlage.	Länge.
Schwerpunkt im Mittelpunkt.	
Abstand von einer beliebigen Linie: $z = \frac{\text{Stat. Mom. d. Fläche}}{\text{Inhalt der Fläche}}$	
$z = \frac{4}{3} r \frac{\sin. \frac{\beta}{2}}{\beta}$ $z = \frac{s^3}{12 F},$ $z = \frac{4}{3} r \frac{\sin. \left(\frac{\beta}{2} \right)}{\beta - \sin. \beta}$	<p>Bogenlänge bei gedrückter Form annähernd:</p> $= s + \frac{8}{3} \cdot \frac{h^2}{s},$ <p>Länge des Radius:</p> $r = \frac{\frac{1}{4} s^2 + h^2}{2 h}.$
$z = 0,4244 r,$ <p>annähernd:</p> $z = \frac{14}{33} r.$	

1

1

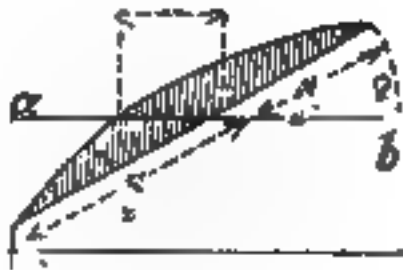
1

1

1

Schwerpunktslage.	Länge.
$z = \frac{4}{3} \cdot \frac{\sin. \frac{\beta}{2}}{\beta} \cdot \frac{r_1^3 - r_2^3}{r_1^2 - r_2^2} = \frac{2}{3} \frac{r_1^2 + r_1 r_2 + r_2^2}{r_1 + r_2} \sin. \frac{\beta}{2}$ $z = \frac{\sin. \frac{\beta}{2}}{\beta} r \left(2 + \frac{1}{6} \frac{b^2}{r^2} \right).$	
Mitte der Figur.	
$z = \frac{4}{3 \pi} \frac{r_1^3 - r_2^3}{r_1^2 - r_2^2}$ $= \frac{4}{3 \pi} \frac{r_1^2 + r_1 r_2 + r_2^2}{r_1 + r_2}$	

Parabelabschnitt.



$$F = \frac{2}{3} h a \sin. \alpha,$$

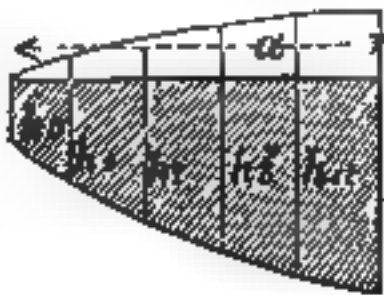
$\overline{ab} \parallel A$ halbiert F .

Kettenlinie.

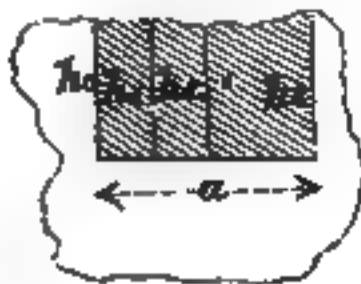


angewandte Mathematik.

Normaler Ausschnitt aus einer
einzelnen Figur.



Man theile a in n gleiche
Theile, wobei n eine gerade
Zahl sein muss. Alsdann ist:



$$F = [h_0 + 4(h_1 + h_3 + \dots + h_{n-1}) + 2(h_2 + h_4 + \dots + h_{n-2})] \frac{a}{8n}.$$

Schwerpunktslage.	Länge.

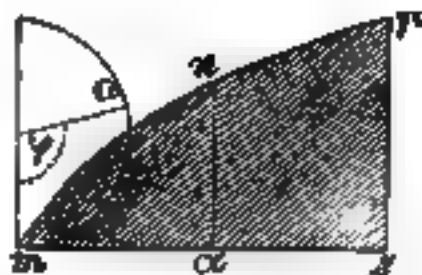
Abstand von a:

$$z = \frac{a}{n} \cdot \frac{1 \cdot 4 h_1 + 2 \cdot 2 h_2 + 3 \cdot 4 h_3 + \cdot 4 \cdot 2 h_4}{h_0 + 4 h_1 + 2 h_2 + 4 h_3 \dots}$$

Abstand von h_0 :

$$z_1 = \frac{h_0^2 + 4 h_1^2 + 2 h_2^2 + 4 h_3^2 + \cdot 2 \cdot h_4^2 \dots}{h_0 + 4 h_1 + 2 h_2 + 4 h_3 + 2 h_4 \dots}$$

Cycloide.



Fläche m a p

$$= \frac{2}{3} r^2 \pi.$$

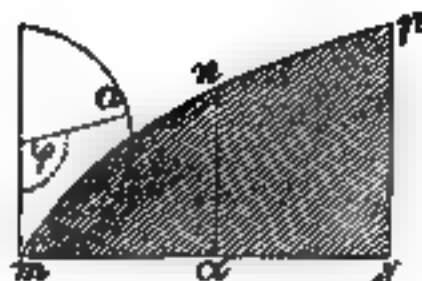
Hyperbolische Abschnitte.

$$\overline{OP} \parallel c.$$

$$\overline{ME} = a.$$

$$= a e \left[\frac{u \sqrt{u^2 - a^2}}{a^2} + \log u \cdot \frac{u - \sqrt{u^2 - a^2}}{a} \right].$$

Schwerpunktlage.	Länge.
	$\begin{aligned} \overline{am} &= \text{Bogen } \left\{ \begin{array}{l} a m \\ p s = 2 r \cdot \end{array} \right. = \varphi, \\ \overline{ms} &= r \pi. \end{aligned}$ <p>Bogen n m:</p> $= 4 r \left(1 - \cos. \frac{\varphi}{2} \right).$ <p>Bogen m p: $= 4 r.$</p>



Fläche mnp

$$= \frac{2}{3} r^2 \pi.$$

$\frac{2}{3}$

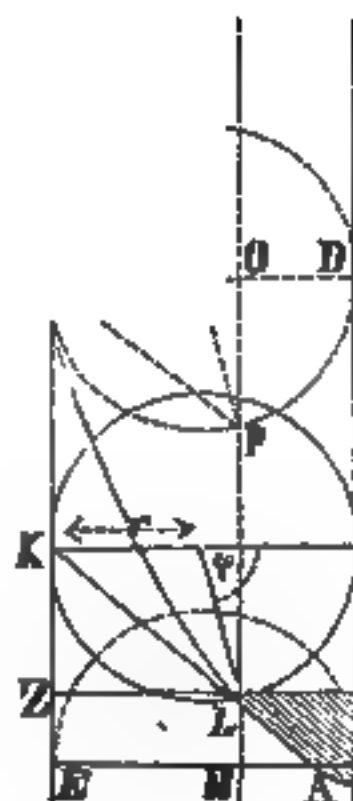
$\frac{2}{3}$

Bogen n m:

$$= 4 r \left(1 - \cos. \frac{\varphi}{2} \right).$$

Bogen m p: $= 4 r.$

Cycloide.



Fläche A L v

$$= r^2 \left(\frac{1}{2} \varphi - 2 \sin. \varphi + \frac{1}{2} \sin. \varphi \cos. \varphi \right).$$

Fläche A L M

$$= r^2 \left(\sin. \varphi - \varphi \cos. \varphi - \frac{1}{2} \varphi + \frac{1}{2} \sin. \varphi \cos. \varphi \right).$$

Fläche A D C L A

$$= \frac{3}{2} \pi r^2.$$

Fläche A E C L A

$$= \frac{1}{2} \pi r^2.$$

Fläche C L O

$$= r^2 \left(\frac{1}{2} \varphi' + \sin. \varphi' - \varphi' \cos. \varphi' - \frac{1}{2} \sin. \varphi' \cos. \varphi' \right).$$

Fläche C L Z

$$= \frac{1}{2} r^2 (\varphi' - \sin. \varphi' \cos. \varphi').$$

Epicycloide.



Fläche A J D B

$$= \frac{\pi}{2} r^2 \left(3 + \frac{2r}{R} \right).$$

Schwerpunktslage.	Länge.
	<p>Halbe Cycloide:</p> $A L C = 4 r.$ <p>Bogen:</p> $L C = 2 K L,$ $= 2 C P.$
	<p>Bogen:</p> $A J D = \frac{4 r}{R} (R + r).$

Figur.	Flächeninhalt.
Entstehung siehe unter Kurven.	Längen- und Raum- Maasse siehe unter Kurven.

$$\frac{1}{2} h = 2 \times 2$$

$$2 = \frac{1}{2} h \quad \text{, , , , ,}$$




$$\begin{array}{l} h \\ 2 = \frac{1}{2} h \\ \pi_1, \pi_2, \pi_3, \pi_4 \\ 2 = \frac{1}{2} h \end{array} \quad \begin{array}{l} b \\ 2 = \frac{1}{2} h \\ 2 = \frac{1}{2} h \\ 2 = \frac{1}{2} h \end{array}$$

$$2 = \frac{1}{2} h$$


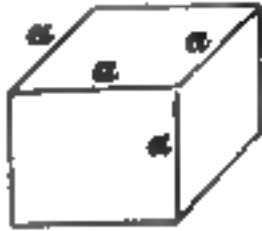
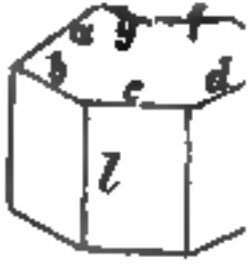
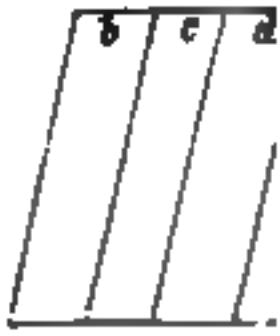
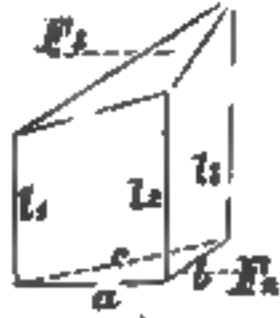
$$\begin{array}{l} \pi_1, \pi_2, \pi_3, \pi_4 \\ \pi_1, \pi_2, \pi_3, \pi_4 \\ \pi_1, \pi_2, \pi_3, \pi_4 \\ \pi_1, \pi_2, \pi_3, \pi_4 \end{array} \quad \begin{array}{l} \pi_1, \pi_2, \pi_3, \pi_4 \\ \pi_1, \pi_2, \pi_3, \pi_4 \\ \pi_1, \pi_2, \pi_3, \pi_4 \\ \pi_1, \pi_2, \pi_3, \pi_4 \end{array}$$

Körperinhalt, Flächen- und Schwerpunkts-T

~~~~~

|                                                                                     | Umfläche $F_1$ .<br>Eine Endfläche $F_2$ .           |
|-------------------------------------------------------------------------------------|------------------------------------------------------|
|    | $F_1 = (a + b + c) l,$ $F_2 = \frac{b h}{2}.$        |
|   | $F_1 = 2 l (b + h),$ $F_2 = b h.$                    |
|  | $F_1 = 4 l \sqrt{h^2 + \frac{b^2}{4}},$ $F_2 = b h.$ |
|                                                                                     | $F_1 = 6 l r,$ $F_2 = 2,598 r^2.$                    |

| Cubikinhalt.               | Schwerpunktlage.                                                                                                            |
|----------------------------|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| $= \frac{b h}{2} \cdot l.$ |                                                                                                                             |
| $= b h l.$                 | <p>In der Verbindungslinie<br/>der Schwerpunkte von den<br/>Endflächen.</p> <p>Abstand von denselben:</p> $z = \frac{l}{2}$ |
| $= b h l.$                 | <p>für den Körper wie für den<br/>Mantel allein:</p>                                                                        |
| $= 2,598 l r^2.$           | <p>dito.</p>                                                                                                                |

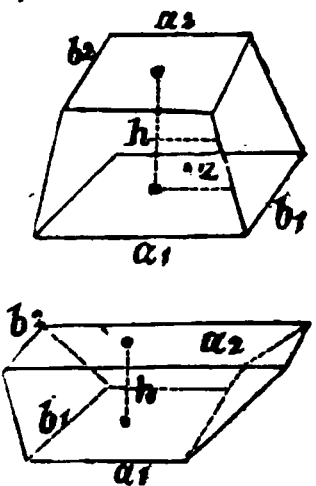
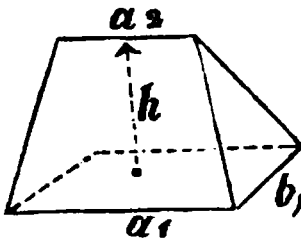
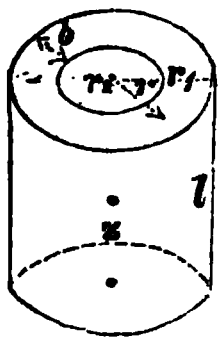
|                                             | Form.                                                                                                                                                                      | Umfläche $F_1$ .<br>Eine Endfläche $F_2$ .                                                                          |
|---------------------------------------------|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| Cylinder.                                   |                                                                                           | $F_1 = 2 l r \pi,$<br>$F_2 = r^2 \pi.$                                                                              |
| Würfel.                                     |                                                                                          | $F_1 = 4 a^2,$<br>$F_2 = a^2.$                                                                                      |
| Beliebiges schiefes oder<br>gerades Prisma. | <br> |                                                                                                                     |
| schief abgeschn.<br>dreiseit. Prisma.       |                                                                                         | $+ (l_2 + l_3) b + (l_2 + l_1) c].$<br>Untere Fläche $F_1$ und obere<br>Fläche $F_2$ als Dreieck zu be-<br>rechnen. |

| Cubikinhalt.                         | Schwerpunktslage.                                                                      |
|--------------------------------------|----------------------------------------------------------------------------------------|
| $= r^2 \pi l.$                       | Wie vor.                                                                               |
| $= a^3.$                             | Wie vor.                                                                               |
| $= F_2 l.$                           | Wie vor.                                                                               |
| $= F_2 l.$                           |                                                                                        |
| $= \frac{F_2 (l_1 + l_2 + l_3)}{3}.$ | $\frac{z = l_1^2 + l_2^2 + l_3^2 + l_1 l_2 + l_1 l_3 + l_2 l_3}{4 (l_1 + l_2 + l_3)}.$ |

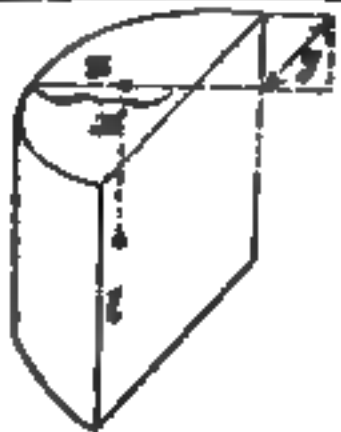
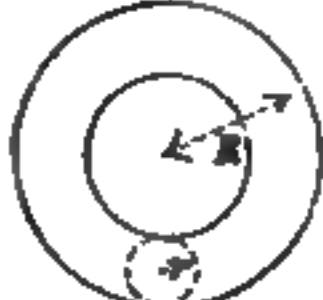
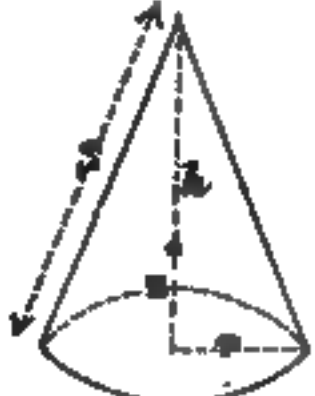
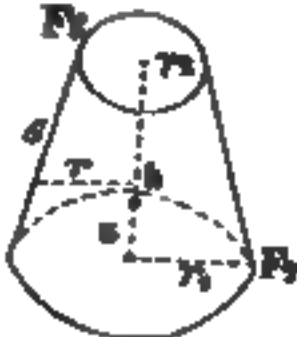


| Cubikinhalt.                                  | Schwerpunktslage.                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                  |
|-----------------------------------------------|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| $= F_2 \frac{h}{3},$ $= \frac{a b h}{3}.$     | $z = \frac{h}{4}.$ <p>Für den Mantel allein:</p> $z = \frac{h}{3}.$                                                                                                                                                                                                                                                                                                                |
| $= F_2 \frac{h}{3}.$                          | <p>In der Verbindungslinie der Spitze mit dem Schwerpunkte von <math>F_2</math>:</p> $z = \frac{h}{4}.$                                                                                                                                                                                                                                                                            |
| $= (F_2 + F_3 + \sqrt{F_2 F_3}) \frac{h}{3}.$ | $z = \frac{F_2 + 2\sqrt{F_2 F_3} + 3F_3}{F_2 + 2\sqrt{F_2 F_3} + F_3} \cdot \frac{h}{4}.$ <p><math>z = \frac{1^2 + 2 \cdot 1 \cdot 2 + 3 \cdot 2^2}{1^2 + 2 \cdot 1 \cdot 2 + 2^2} \cdot \frac{10}{4}</math></p> <p><math>z = \frac{1 + 4 + 12}{1 + 4 + 4} \cdot \frac{10}{4}</math></p> <p><math>z = \frac{17}{9} \cdot \frac{10}{4} = \frac{170}{36} = 4 \frac{11}{9}</math></p> |

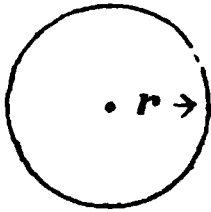
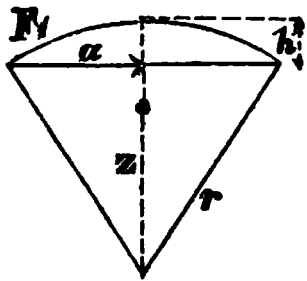
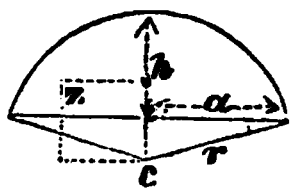
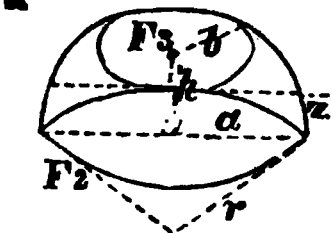


|                                | Form.                                                                               | Umfläche $E_1$ .<br>Eine Grundfläche $F_2$ .                                            |
|--------------------------------|-------------------------------------------------------------------------------------|-----------------------------------------------------------------------------------------|
| Damm und Obelisk (rechteckig). |   | Speziell nachzurechnen.                                                                 |
| Rechteckiger Keil.             |  | dito.                                                                                   |
| Hohlzylinder.                  |  | $F_1 = 2 \pi l (r_1 + r_2),$ $= 4 \pi l r,$ $F_2 = \pi (r_1^2 - r_2^2),$ $= 2 \pi r b.$ |

| Cubikinhalt.                                                   | Schwerpunktlage.                                                                                                                                        |
|----------------------------------------------------------------|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| $= [2 (a_1 b_1 + a_2 b_2) + (a_1 b_2 + a_2 b_1)] \frac{h}{6}.$ | <p>Abstand von Fläche <math>a_1 b_1</math></p> $z = \frac{a_1 b_1 + 3 a_2 b_2 + a_1 b_2}{2 a_1 b_1 + 2 a_2 b_2 + a_1 b_2 + a_2 b_1} \cdot \frac{h}{2}.$ |
| $= (2 a_1 + a_2) \frac{b_1 h}{b}.$                             |                                                                                                                                                         |
| $\pi l (r_1^2 - r_2^2),$ $2 \pi r b l.$                        | <p>Mitte der Figur:</p> $z = \frac{l}{2}.$                                                                                                              |

|                      |                                                                                     |                                                                                                                     |
|----------------------|-------------------------------------------------------------------------------------|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| Parabol. Prisma.     |    | $F_3 = \frac{1}{3} x y.$                                                                                            |
| Ring.                |   | <p>Ganze Fläche:</p> $F = 4 \pi^2 R r.$                                                                             |
| Gerader Kegel.       |  | $F_1 = r \pi \sqrt{h^2 + r^2}.$ $= s r \pi$ $F_2 = r^2 \pi.$                                                        |
| Abgestumpfter Kegel. |  | $F_1 = \pi (r_1 + r_2) \times$ $\sqrt{h^2 - (r_1^2 - r_2^2)},$ $= 2 \pi r s,$ $F_2 = r_1^2 \pi,$ $F_3 = r_2^2 \pi.$ |

| Cabikinhalt.                                   | Schwerpunktlage.                                                                                                                                                               |
|------------------------------------------------|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| $= \frac{4}{3} l x y.$                         | $z = \frac{3}{5} x,$ <p>Abstand von der Grundfläche</p> $= \frac{1}{2}.$                                                                                                       |
| $2 \pi^2 R r^2.$                               | <p>Mitte der Figur.</p>                                                                                                                                                        |
| $= \frac{\pi r^2 h}{3}.$                       | $z = \frac{h}{4}.$ <p>Für den Mantel allein:</p> $z_1 = \frac{h}{3}.$                                                                                                          |
| $= \frac{\pi}{3} h (r_1^2 + r_1 r_2 + r_2^2).$ | $z = \frac{h}{4} \left( \frac{r_1^2 + 2 r_1 r_2 + 3 r_2^2}{r_1^2 + r_1 r_2 + r_2^2} \right).$ <p>Für den Mantel allein:</p> $z = \frac{1}{3} h \frac{r_1 + 2 r_2}{r_1 + r_2}.$ |

|                              | Form.                                                                               | Umfläche $F_1$ .<br>Eine Grundfläche $F_2$ .                                                                           |
|------------------------------|-------------------------------------------------------------------------------------|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| Kugel.                       |    | $F = 4 r^2 \pi.$                                                                                                       |
| Kugelabschnitt — Ausschnitt. |   | Kegelmantel:<br>$F = a \pi r,$<br>$= \pi r \sqrt{2 r h - h^2}.$                                                        |
|                              |  | $F_1 = 2 \pi r h,$<br>$= \pi (a^2 + h^2).$<br>$F_2 = a^2 \pi,$<br>$r = \frac{a^2 + h^2}{2 h}.$                         |
| Kugelzone.                   |  | $F_1 = 2 r \pi h.$<br>Kugelhalbmesser:<br>$r = \frac{a^2 + h^2}{2 h},$<br>$F_1 = \pi (a^2 + h^2),$<br>$F_2 = a^2 \pi,$ |

| Cubikinhalt.                                                                                                                                          | Schwerpunktslage.                                                                                                                                                    |
|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| $= \frac{4\pi}{3} r^3.$                                                                                                                               | Im Mittelpunkte.                                                                                                                                                     |
| $= \frac{2}{3} \pi r^2 h.$                                                                                                                            | $z = \frac{3}{4} \left( r - \frac{h}{2} \right).$ <p>Für den Mantel:</p> $z = \frac{h}{2}.$                                                                          |
| $= \pi h^2 \left( r - \frac{h}{3} \right),$ $= \frac{\pi}{6} h (3a^2 + h^2);$ <p>für einen niedrigen Abschnitt annähernd</p> $= \frac{\pi a^2 h}{2}.$ | $z = \frac{3}{4} \frac{(2r - h)^2}{3r - h}$ <p>(vom Mittelpunkt C ab).</p> <p>Für den Mantel allein:</p> $z = r - \frac{1}{2} h.$                                    |
| <p>= Differenz zweier Kugelabschnitte:</p> $= \frac{\pi h}{b} (3a^2 + 3b^2 + h^2).$                                                                   | <p>Für den Mantel allein ist der Abstand von der Grundfläche:</p> $z = \frac{h}{2}.$ <p>Für den Körper:</p> $z = \frac{3}{4} h \cdot \frac{2r^2 - h^2}{3r^2 - h^2}.$ |



| Cubikinhalt.                                                                                                                                                   | Schwerpunktlage.                                                                                                                                                                               |
|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| $= \frac{\pi}{6} h (3 a^2 + h^2),$ $- \frac{\pi}{6} h_1 (3 a_1^2 + h_1^2).$                                                                                    | <p>Wenn <math>\alpha</math> der Centriwinkel, so ist der Abstand vom Centrum der Kugel:</p> $z = \frac{3}{8} \frac{a^4 - a_1^4}{a^3 - a_1^3} \cdot \left( 1 + \cos. \frac{\alpha}{2} \right).$ |
| $= \left( \frac{\alpha^0 + \beta^0 + \gamma^0}{180} - 1 \right) \frac{\pi r^3}{3}.$                                                                            |                                                                                                                                                                                                |
| $= \frac{\pi h}{6} [2 (a b + a_1 b_1) + a b_1 + a_1 b].$                                                                                                       |                                                                                                                                                                                                |
| <p>Für kreisförmige:</p> $= \frac{\pi l}{3} (2 r_1^2 + r_2^2),$ <p>für parabolische Krümmung der Dauben:</p> $= \pi l \left( \frac{2 r_1 + r_2}{3} \right)^2.$ | <p>Mitte der Figur.</p>                                                                                                                                                                        |



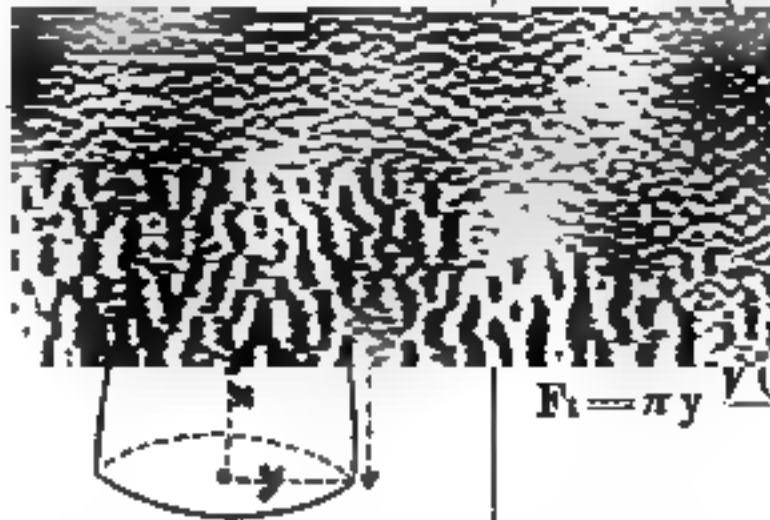
Ellipsoid.



Wenn  $b = c$  und  $e$  den Abstand des Mittels von den Brennpunkten bezeichnet:

$$F_1 = 2\pi b \left( c + \frac{a^2}{e} \arcsin \frac{e}{a} \right).$$

Paraboloid.

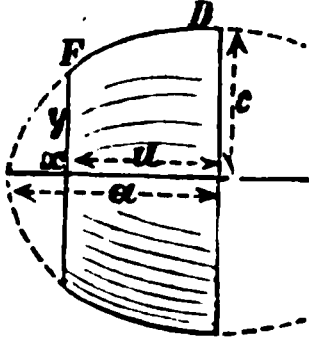
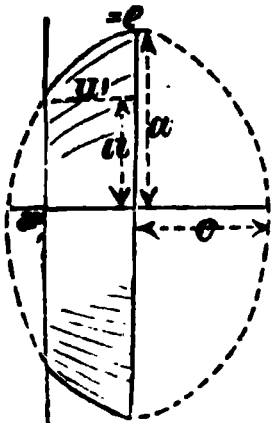
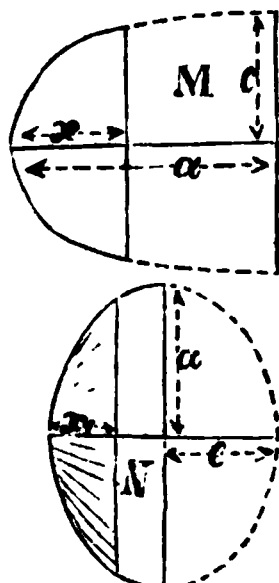


$$F_1 = \pi y \frac{\sqrt{(4x^2 + y^2)^2 - y^2}}{b x^2}.$$

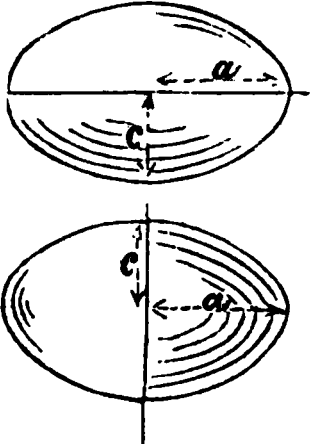
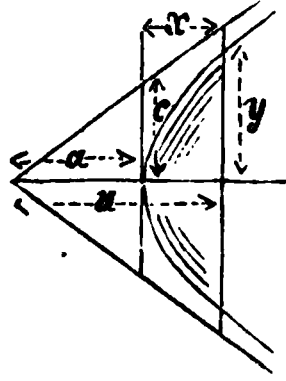
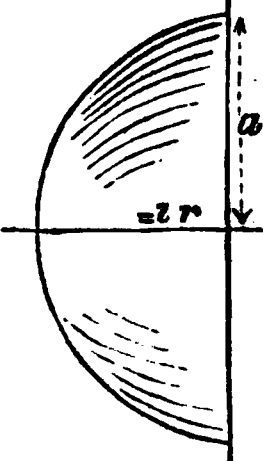
| Cubikinhalt.                                                                                                                                                                             | Schwerpunktslage.                                                                                                                                                                                        |
|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| <p>Man messe in gleichen Abständen <math>a</math>, die Querschnitte <math>F_0 F_1</math> u. s. w. Alsdann ist der Cubikinhalt:</p> $= [F_0 + 4 (F_1 + F_3) + 2 F_2 + F_4] \frac{h}{12}.$ | <p>Von <math>F_0</math>:</p> $z = \left( \frac{0 \cdot F_0 + 1 \cdot 4 F_1}{F_0 + 4 F_1} + \frac{2 \cdot 2 F_2 + 3 \cdot 4 F_3}{+ 2 F_2 + 4 F_3} + \frac{4 \cdot F_4}{+ F_4} \right) \cdot \frac{h}{6}.$ |
| $= \frac{4}{3} \pi a b c,$ <p>wenn <math>a b c</math> die Axen und:</p> $\frac{4}{3} \pi a b^2,$ <p>wenn Axe <math>c = b</math> ist.</p>                                                 | <p>Im Mittelpunkte.</p>                                                                                                                                                                                  |
| $= \frac{\pi}{2} x y^2.$                                                                                                                                                                 | $z = \frac{x}{3}.$                                                                                                                                                                                       |



| Cubikinhalt.                                                                                                | Schwerpunktslage. |
|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-------------------|
| <p>Durch Zerlegung in<br/>sphärische <math>\triangle</math> <math>\triangle</math> zu be-<br/>rechnen.</p>  |                   |
| $= \pi r^2 \frac{1 + h_1}{2}.$ <p><math>r^2 \approx a</math><br/> <math>a = \text{für die Kugel}</math></p> |                   |
|                                                                                                             |                   |

|                        | Form.                                                                                                       | Umfläche. F <sub>1</sub> .<br>Eine Grundfläche E <sub>2</sub> .                                                                                                                                    |
|------------------------|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| Elliptische Zonen.     |  <p>Exzentrizität = e.</p> | $F_1 = \frac{\pi c}{a^2} \left[ u \sqrt{a^4 - e^2 u^2} + \frac{a^4}{e} \arcsin \frac{e u}{a^2} \right].$ <p>F<sub>2</sub> = Kreis mit y resp. c.</p>                                               |
|                        |                           | $F_1 = \frac{\pi a}{c^2} \left[ u_1 \sqrt{c^4 + e^2 u_1^2} + \frac{c^4}{e} \operatorname{arctanh} \frac{e u_1 + \sqrt{c^4 + e^2 u_1^2}}{c^2} \right].$ <p>F<sub>2</sub> = Kreis mit a resp. u.</p> |
| Körper und Abschnitte. |                          | <p>F<sub>2</sub> = halbe Oberfläche des Ellipsoids minus Zone N resp. M.</p>                                                                                                                       |

| Cubikinhalt.                                                                            | Schwerpunktslage. |
|-----------------------------------------------------------------------------------------|-------------------|
| $= \frac{2}{3} \pi a c^2 - \frac{\pi c^2 x^2}{a^2} \left( a - \frac{x}{3} \right).$     |                   |
| $= \frac{2}{3} \pi a^2 c - \frac{\pi a^2 x_1^2}{c^2} \left( c - \frac{x_1}{3} \right).$ |                   |

|                        | Form.                                                                                                                        | Umfläche $F_1$ .<br>Eine Grundfläche $F_2$ .                                                                                                                                                          |
|------------------------|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| Ellipsoid.             | <p>Exzentrizität <math>e</math>.</p>        | $F_1 = 2 \pi c \left[ c + \frac{a^2}{e} \arcsin \frac{e}{a} \right],$ $F_2 = 2 \pi a \left[ a + \frac{c^2}{e} \operatorname{arctanh} \frac{a+e}{c} \right].$                                          |
| Hyperbolischer Abschn. |  <p><math>e = \sqrt{a^2 - c^2}.</math></p> | $F_1 = \pi c \left[ \frac{u \sqrt{e^2 u^2 - a^4}}{a^2} - c^2 - \frac{a^2}{e} \operatorname{arctanh} \frac{eu + \sqrt{e^2 u^2 - a^4}}{a(c+e)} \right].$ <p><math>F_2 = \text{Kreis mit } y.</math></p> |
| Körper.                |                                           | $F_1 = 8 \pi r^2 (\pi - \frac{4}{3}).$ <p><math>F_2 = \text{Kreis mit } a.</math></p>                                                                                                                 |

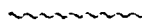
| Cubikinhalt.                                                                              | Schwerpunktslage. |
|-------------------------------------------------------------------------------------------|-------------------|
| $= \frac{4}{3} \pi a c^2,$                                                                | Im Mittelpunkte.  |
| $= \frac{4}{3} \pi a^3 c.$                                                                | desgl.            |
| $= \frac{\pi c^2}{3 a^2} x^2 (3 a + x).$ $= \frac{\pi c^2}{3 a} (u^3 - 3 a^2 u + 2 a^3).$ |                   |
| $= \pi r^3 (\frac{3}{2} \pi^2 - \frac{8}{3}).$                                            |                   |

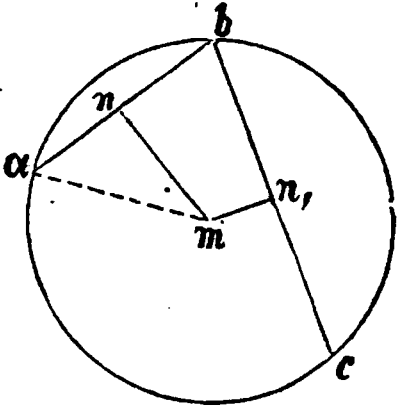
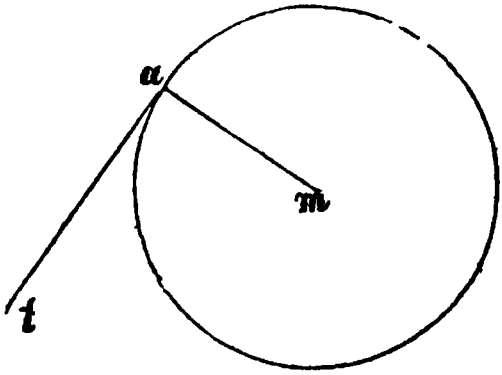
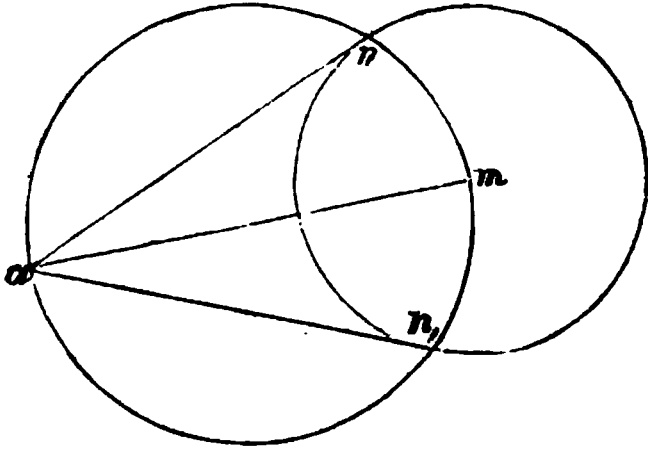


2

1 of 1. 20th May 1935. 1935, 1935

## Kurven-Konstruktions-Tafel.



| Figur.                                                                                           | Aufgabe.                                                |
|--------------------------------------------------------------------------------------------------|---------------------------------------------------------|
| <p>Kreis.</p>   | <p>Einen Kreis durch drei Punkte a b c zu legen.</p>    |
| <p>dito.</p>   | <p>Eine Tangente an den Punkt a zu konstruiren.</p>     |
| <p>dito.</p>  | <p>Von Punkt a aus Tangenten an den Kreis zu legen.</p> |

---

**Konstruktion.**


---

$\overline{ab}$  und  $\overline{bc}$  in  $n$  und  $n$ , halbirt.

$\overline{mn} \perp \overline{ab}$ ;  $\overline{mn}, \perp bc$ .

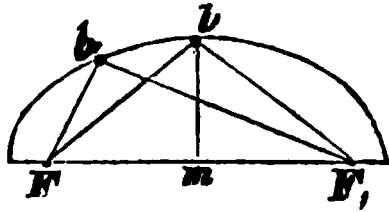
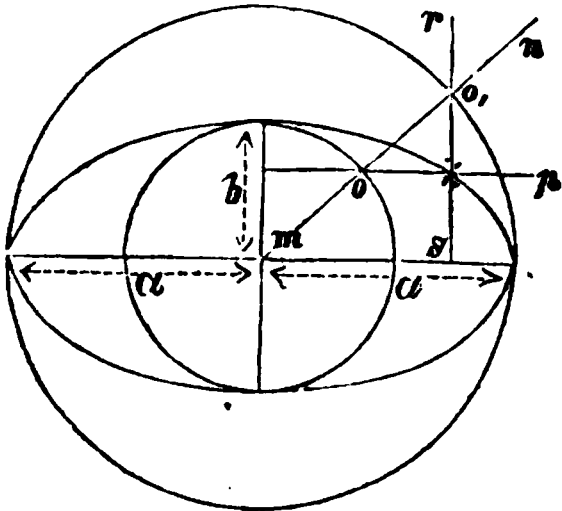
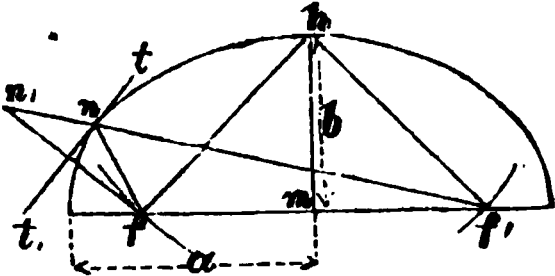
Mit  $\overline{am} \circ$  um Punkt  $m$ .

---

Ziehe  $\overline{am}$  und setze  $\overline{at} \perp \overline{am}$ , so ist  $\overline{at}$  die Tangente.

---

Ziehe  $\overline{am}$  und lege  $\odot$  über  $\overline{am}$ , so sind  $\overline{an}$  und  $\overline{an}$ , Tangenten.

| Figur.                                                                                            | Aufgabe.                                                                                                                 |
|---------------------------------------------------------------------------------------------------|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| <p>Ellipse.</p>  | <p>Gegeben die Brennpunkte <math>F</math> und <math>F_1</math>, sowie die halbe kleine Axe <math>m b</math>.</p>         |
| <p>dito.</p>    | <p>Konstruktion der Ellipse aus den Halbaxen <math>a</math> und <math>b</math>.</p>                                      |
| <p>dito.</p>   | <p>Konstruktion der Tangente <math>tt</math> an Punkt <math>n</math>.<br/>Gegeben <math>a</math> und <math>b</math>.</p> |

---

**Konstruktion.**

---

den Stift, spanne einen Faden von  $F$   
 d führe den Stift  $b$  — den Faden straff  
 Er beschreibt eine Ellipse.

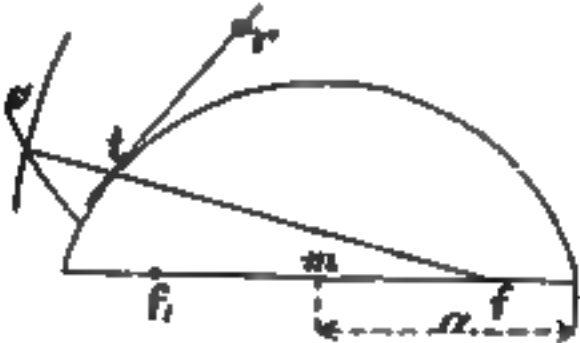
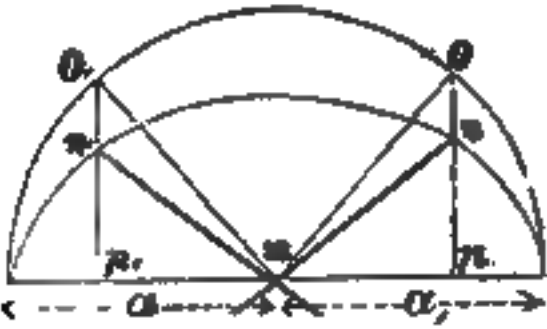
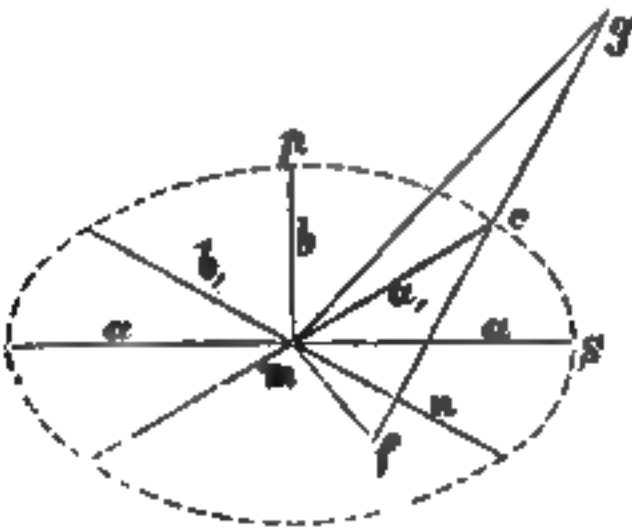
---

mit  $b$  um  $m$ ;  $\bigcirc$  mit  $a$  um  $m$ ; Ziehe  
 Radius  $mn$ ; durch Punkt  $o$  die Linie  
 $e$ , die Linie  $ra \parallel b$ , so ist  $\times$  ein Punkt

---

um  $h$  zwei Bogen, so sind  $f$  und  $f_1$

l mache  $\overline{nn_1} = \overline{nf}$  halbire  $\overline{nf}$  und  
 eses die Tangente zu  $n$ .

| Figur.                                                                                                   | Aufgabe                                                                                                                                                    |
|----------------------------------------------------------------------------------------------------------|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| <p><b>Ellipse.</b></p>  | <p><b>Konstruierung einer Tangente durch Punkt <math>r</math></b></p>                                                                                      |
| <p><b>ditto.</b></p>  | <p><b>Konstruierung des konjugierten Durchmessers zu <math>m</math></b></p>                                                                                |
| <p><b>ditto.</b></p>  | <p><b>Konstruierung der Halbachsen <math>a</math> und <math>b</math> des gegebenen konjugierten Durchmessers <math>a_1</math> und <math>b_1</math></b></p> |

---

**Konstruktion.**


---

$f$  und  $f$ , Brennpunkte.

Kreisbogen mit  $2a$  um  $f$ .

Kreisbogen mit  $rf$ , um  $r$ .

Verbinde  $f$  mit  $s$ , und ziehe  $\overline{rt}$ , so ist dieses die Tangente.

---

$\bigcirc$  mit  $a$  um  $m$ .

$\overline{op} \perp$  durch  $n$  auf  $a$ .

$o$  mit  $m$  verbunden.

$\overline{o, m} \perp$  auf  $\overline{o m}$ .

$\overline{o, p} \perp$  auf  $a$ .

$n, m$  ist der konj. Durchmesser.

---

$\overline{cn} \perp$  von  $c$  aus auf  $b$ ,

$\overline{cg} = cf = b$ ,

$g$  mit  $m$  verbunden.

$f$  mit  $m$  verbunden.

★  $gm$   $f$  halbiert und  $pm \perp$  auf  $a$ , so sind  $b$  und  $a$  die Richtungen der Halbaxen.

Ihre Längen sind:

$$a = \frac{\overline{mg} + \overline{mf}}{2}.$$

$$b = \frac{\overline{mg} - \overline{mf}}{2}.$$





---

**Konstruktion.**


---

⊙ mit b um m.

$\overline{gf} = \overline{dh}$  und  $\overline{hg}$  halbirt in k.

$\overline{kII} \perp \overline{dg}$ ,

so sind I. II. III. Mittelpunkte für die Kreise aus denen die Korblinie besteht.

---

⊙ mit b um m.

$\frac{1}{5} \overline{dg} = \overline{mIII} = \overline{mn} = \overline{nI}$ .

$\frac{2}{3} \overline{mIII} = \overline{mr}$ .

r mit I verbunden.

Alsdann sind I. II. III. die Mittelpunkte für die eine lfte der Korblinie.



---

**Konstruktion.**


---

Setze  $\overline{BA} \perp \overline{AX}$  und  $\overline{MB} \perp \overline{AB}$ . Theile  $\overline{BM}$  in beliebig viele = Theile. Ebenso  $\overline{AB}$  in dieselbe Anzahl. Ziehe die Strahlen  $\overline{A1}$ ;  $\overline{A2}$ ,  $\overline{A3}$  u. s. w. Die  $\parallel$  Linien mit  $\overline{AX}$ , I. II. III. u. s. w., so sind  $\times \times$  Punkte der Parabel.

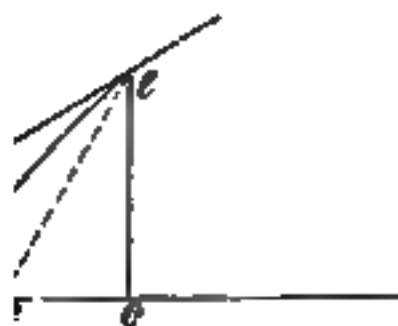
---

Man lasse den Scheitel eines rechten Winkels an  $AY$  so gleiten, dass der eine Schenkel immer durch  $F$  geht. Der andere Schenkel bildet dann stets eine Tangente zur Parabel.

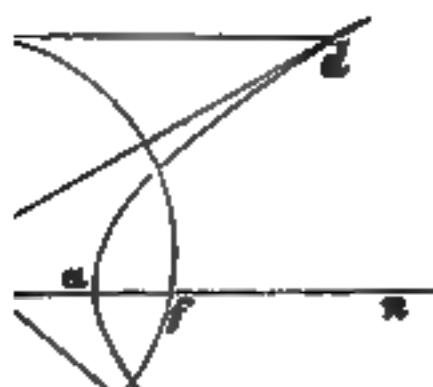
Man lege eine Kurve berührend an die Linien 1 2, 2 3, u. s. w., so ist dieses die Parabel.



1  
2  
3  
4  
5



der Tangente  
an einen  
Punkt  $e$ .



Desgleichen  
von einem  
Punkte  $Q$  aus.

---

**Konstruktion.**


---

oder  $\overline{df} = \overline{fe}$ .  $\overline{de}$  ist die Tangente.

---

$$\overline{af} = \overline{ab}.$$

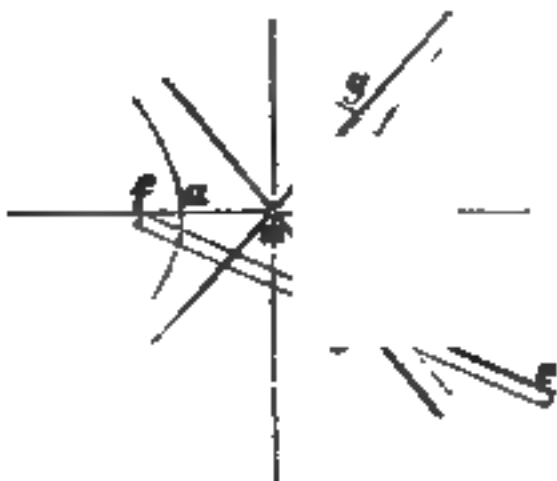
⊙ mit Q f um Q.

$$\overline{cd} \text{ und } g h \parallel \overline{bn}.$$

d und h sind die Berührungspunkte der Tangenten.

---



| Figur.                                                                                                                                 | Aufgabe.                                                                                                                                                                 |
|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| <p data-bbox="343 645 581 710"><b>Hyperbel.</b></p>  | <p data-bbox="1171 746 1475 1095">Gegeben die<br/>Brennpunkte<br/><math>f</math> und <math>f_2</math>, sowie<br/>die Scheitel<br/><math>a</math> und <math>b</math>.</p> |
|                                                                                                                                        | <p data-bbox="1180 1637 1466 1842">Konstruktion<br/>der<br/>Asymptoten.</p>                                                                                              |

### Konstruktion.

---

um Brennpunkt  $f$ . Faden  $c d f$ ,  
 Fahrstift  $d$  beschreibt unter Straff-  
 Arm der Hyperbel. Um die andere  
 sache man das Lineal um  $f$ , drehbar.

---

$\bar{f}$  um  $m$ .

$n g$ , sind Asymptoten.

---

**Aufgabe.**

---

**Gegeben  
der  
Erzeugungs-  
kreis.**

---

**Konstruktion.**


---

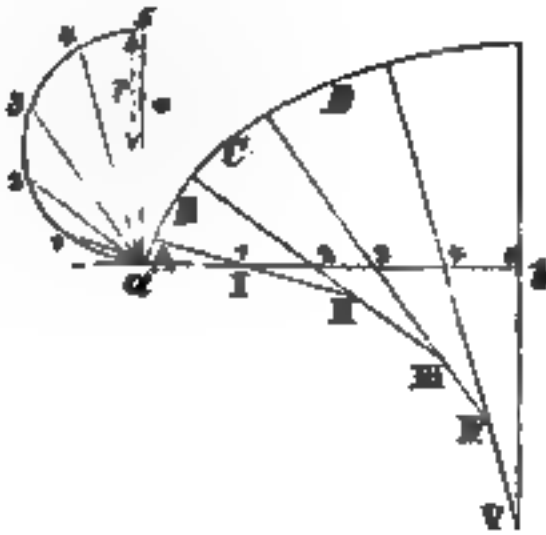
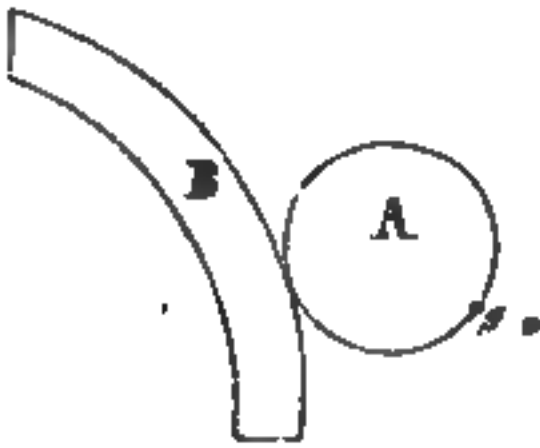
Kreis von Blech, Holz oder dergl. längs  
und befestige bei  $s$  einen Stift, so beschreibt  
Cycloide.

---

Mache Bogen  $a b$  — Linie  $a c$ . Bogen  $a f$  = Linie  
. Kreise mit  $r$  um  $d$  und  $h$ , und  $\sphericalangle \alpha = \alpha$ ,  $\sphericalangle \beta = \sphericalangle \beta$ ,  
sind  $xx$  Punkte der Cycloide.

---

Linien  $\overline{ab}$  = Halbkreis  $a c$ . Theile Beides in belie-  
viele gleiche Theile. Konstruirt die Durchschnittpunkte  
 $1, 2, 3, 4$  u. s. w. und mache  $\overline{1x} = \overline{ef}$ ;  $\overline{2x} = \overline{gh}$   
 $= \overline{ik}$  u. s. w., so sind  $xxx$  Punkte der Cycloide.

| Figur.                                                                                                                                | Aufgabe.                                                                         |
|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----------------------------------------------------------------------------------|
| <p data-bbox="314 587 539 645">Cycloide.</p>        | <p data-bbox="1164 780 1437 1045">Gegeben<br/>der<br/>Erzeugungs-<br/>kreis.</p> |
| <p data-bbox="314 1454 621 1512">Epicycloide.</p>  | <p data-bbox="1147 1671 1454 1791">Gegeben<br/>beide Kreise.</p>                 |

---

Konstruktion.

---

Mache  $\overline{ab}$  = dem Halbkreis  $1, 5 = r\pi$ . Theile ihn in gleich viele gleiche Theile 1, 2, 3, 4, 5. Zi-

1 in  $a b$  || mit Sehne  $\overline{a1}$

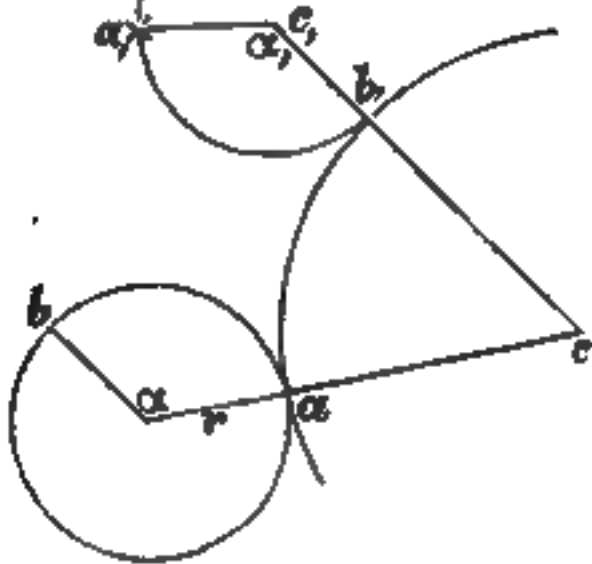
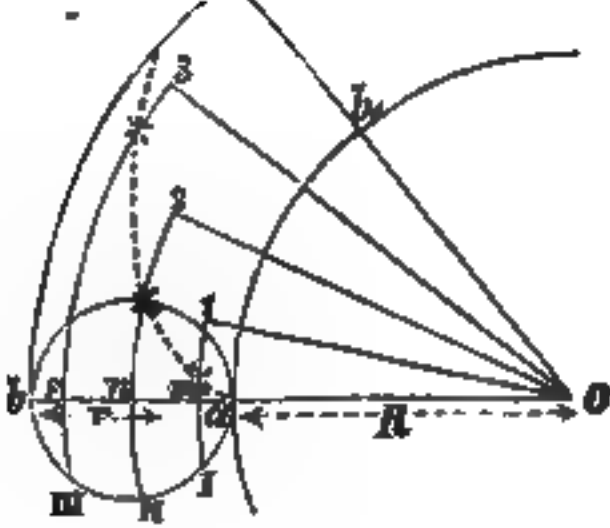
2 „ || „ „  $\overline{a2}$

3 „ || „ „  $\overline{a3}$

u. s. w., so sind I, II, III u. s. w. die Mittelpunkte der Cycloiden Bögen A B C u. s. w.

---

Rolle den Kreis A von Holz, Blech etc. um die Seite eines ebensolchen massiv. Bogens B, so daß der Fahrstift  $a$  eine Epicycloide.

| Figur.                                                                                                                                    | Aufgabe.                                                       |
|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----------------------------------------------------------------|
| <p data-bbox="326 565 633 626"><b>Epicycloide.</b></p>  | <p data-bbox="1159 818 1459 951">Gegeben<br/>beide Kreise.</p> |
| <p data-bbox="326 1384 418 1432">dito.</p>             | <p data-bbox="1234 1673 1367 1721">Desgl.</p>                  |

---

**Konstruktion.**


---

Mache Bogen  $a b = \text{Bogen } a b$ , ziehe  $\overline{c c}$ ,  
 $r$  einen Bogen um  $c$ , und mache  $\sphericalangle \alpha = \alpha$ ,  
 Punkt der Epicycloide.

---

Mache Bogen  $a b = \text{Bogen } a b, = \frac{r}{R} 180$   
 beide in dieselbe Anzahl gleiche Theile. Zieh  
 $\overline{o 1}$ ;  $\overline{o 2}$ ;  $\overline{o 3}$  u. s. w. Schlage die Bogen  $1 I$   
 u. s. w. um  $o$ , konstruire die Durchschnittspunkte  
 u. s. w. und mache  $\overline{1 * = m I}$ ;  $\overline{2 * = n II}$ ;  $\overline{3 * =}$   
 so sind  $**$  Punkte der Epicycloide.





1

1

1

---

**Konstruktion.**


---

Der Halbmesser des Grundkreises sei  $= R$ ,  
Erzeugungskreises  $= r$ .

Man theile ein Bogenstück des Grundkreises  
eine beliebige Anzahl gleicher Theile z. B. in 4  
a die Länge eines jeden dieser Theile.

Man nehme ein Bogenstück  $= \left( \frac{R}{r} + 1 \right) a$  und  
es eben so oft — also hier 4 mal — auf dem Grund-  
Verbinde Punkt 1 und I, 2 und II, 3 und III, 4  
so sind \* \* die Mittelpunkte der Kreisbögen A B C

---

Rolle den massiven  $\bigcirc A$  um die Innenkante d  
siven Bogenstückes B. Der Fahrstift s beschre  
Hypocycloide.



---

**Konstruktion.**


---

Bogen  $a o = \text{Bogen } o a, = \frac{r}{R} 180^\circ$ . Schlage einen Bogen mit  $r$  um  $b$  und mache  $\sphericalangle \alpha = \sphericalangle \alpha$ , so ist  $x$  ein Punkt der Hypocycloide.

---

Bogen  $a b = \text{Bogen } a c = \frac{r}{R} 180^\circ$ . Theile Beides in gleich viel gleiche Theile. Schlage die Bogen 1, 2, 3, 4, 5, ziehe die Radien  $c d e f$  und mache  $\overline{c x} = \overline{1 m}$ ;  $\overline{d x} = \overline{2 n}$ ;  $\overline{e x} = \overline{3 p}$ ;  $\overline{f x} = \overline{4 q}$  u. s. w., so sind  $x x$  Punkte der Cycloide.

|                                                                                     |                                  |
|-------------------------------------------------------------------------------------|----------------------------------|
|                                                                                     | <b>Aufgabe.</b>                  |
|                                                                                     |                                  |
|                                                                                     | <b>Gegeben<br/>beide Kreise.</b> |
|                                                                                     |                                  |
|  | <b>Desgl.</b>                    |
|                                                                                     |                                  |

---

**Konstruktion.**


---

Bogen  $o 4$  in beliebig viele gleiche Theile  
 z. B. in 4 deren jeder  $= a$ ; und mache die Theile  $o I$ ;  
 $I II$ ;  $II III$  u. s. w.  $= \left(\frac{R}{r} - 1\right) a$ . Ziehe die Linien  $\overline{I 1^*}$ ;  
 $\overline{II 2^*}$ ;  $\overline{III 3^*}$  u. s. w., so sind  $^*^*$  die Mittelpunkte zu den  
 Bogen  $A B C D$  u. s. w.

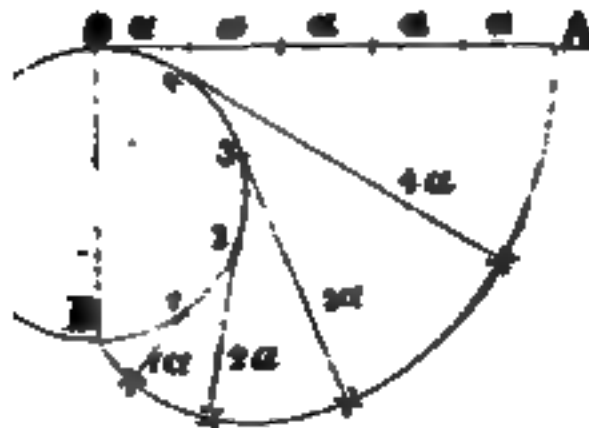
---

Um einen festen massiven  $\odot$  lege man einen Faden  
 und wickele denselben ab. Der Fahrstift  $s$  beschreibt die  
 Kreisevolvente.

Figur.

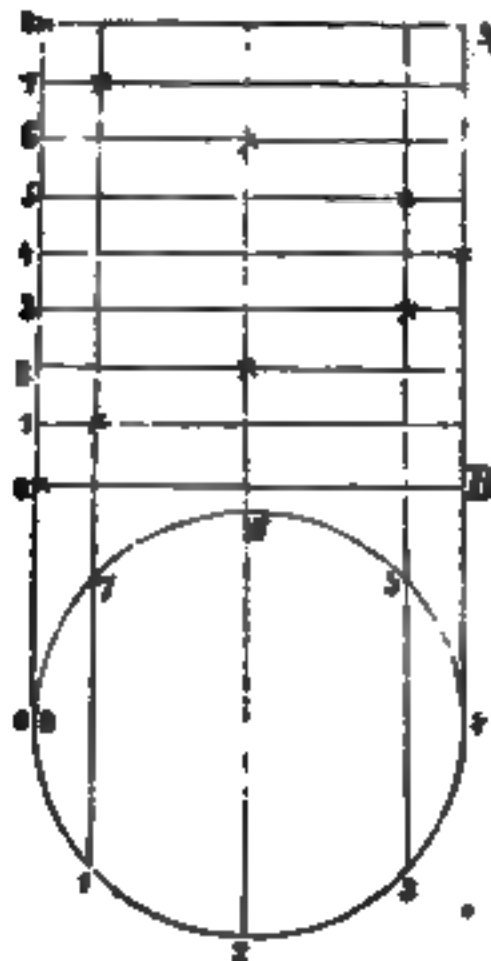
Aufgabe.

sevolvente.



Gegeben  
beide Kreise.

nder. Schraubenlinie.



Gegeben  
die Steigung  
und der  
Grundkreis.

---

**Konstruktion.**


---

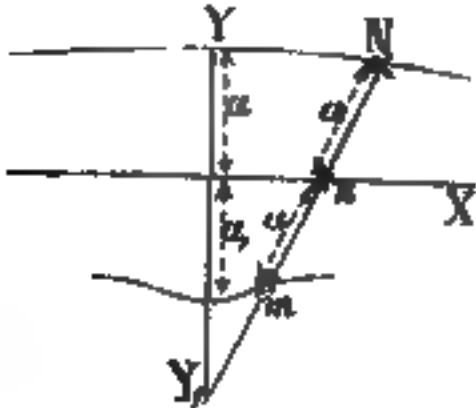
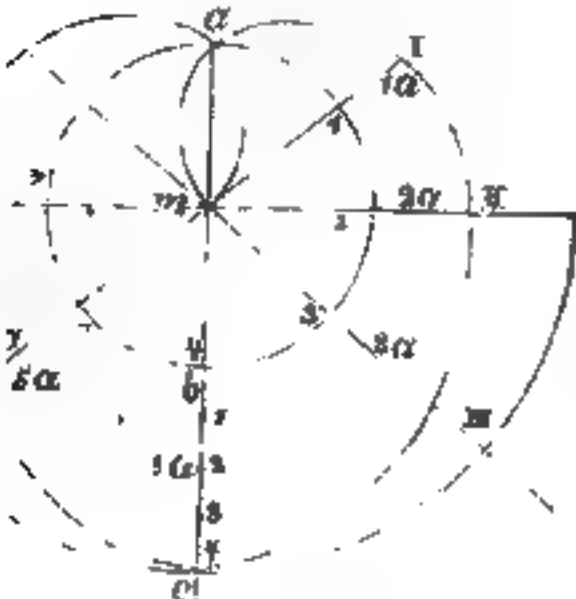
Mache  $\overline{OA} = \text{Bogen } OB$ , theile Beides in gleich viel gleiche Theile, deren jeder  $= a$  sei.

Lege an Punkt 1 eine Tangente und mache sie  $= a$ ; desgl. eine Tangente an Punkt 2  $= 2a$  u. s. w., so sind  $xx$  Punkte der Evolvente.

---

Theile die Steigung  $\overline{AB}$  in  $n$  gleiche Theile und den Grundkreis in ebenso viele. Ziehe die Horizontal- und Vertikal-Linien wie in der Figur, so sind  $xx$  Punkte der Schraubenlinie.



| Figur.                                                                                         | Aufgabe.                                  |
|------------------------------------------------------------------------------------------------|-------------------------------------------|
| <p>oide</p>  | <p>Gegeben a.</p>                         |
|            | <p>Gegeben der<br/>Kreis und<br/>b c.</p> |

---

**Konstruktion.**


---

$\overline{y y} \perp \overline{x x}$ .  $a = a$ , Punkt  $y$ , beliebig, ebenso Linie  $y, n N$ .

Mache  $n N = \overline{n m} = a$ , so sind \*\*\* Punkte der Conchoide.

---

Theile den Halbkreis  $\overline{a b}$  in  $n$  gleiche Theile, ebenso  $\overline{b c}$ . Jeder der Letzteren sei  $= a$ . Ziehe den Radius  $\overline{m 1}$  und mache  $\overline{1 I} = a$ ; ferner den Radius  $\overline{m 2}$  und mache  $\overline{2 II} = 2 a$ ; ferner den Radius  $\overline{m 3}$  und mache  $\overline{3 III} = 3 a$  u. s. w., so sind IIIII Punkte der Neoide.

---



## toniometrische Formel-Tafel.

## Formel.

|                                                 |                                          |
|-------------------------------------------------|------------------------------------------|
| $\sin. 0^\circ = 0$                             | $\cos. 0^\circ = 1.$                     |
| $\text{tang. } 0^\circ = 0$                     | $\cot. 0^\circ = \infty .$               |
| $\sin. 30^\circ = \frac{1}{2}$                  | $\cos. 30^\circ = \frac{1}{2} \sqrt{3}.$ |
| $\text{tang. } 30^\circ = \frac{1}{3} \sqrt{3}$ | $\cot. 30^\circ = \sqrt{3}.$             |
| $\sin. 45^\circ = \frac{1}{2} \sqrt{2}$         | $\cos. 45^\circ = \frac{1}{2} \sqrt{2}.$ |
| $\text{tang. } 45^\circ = 1$                    | $\cot. 45^\circ = 1.$                    |
| $\sin. 60^\circ = \frac{1}{2} \sqrt{3}$         | $\cos. 60^\circ = \frac{1}{2}.$          |
| $\text{tang. } 60^\circ = \sqrt{3}$             | $\cot. 60^\circ = \frac{1}{3} \sqrt{3}.$ |
| $\sin. 90^\circ = 1$                            | $\cos. 90^\circ = 0.$                    |
| $\text{tang. } 90^\circ = \infty$               | $\cot. 90^\circ = 0.$                    |

$$\sin. 90 \pm \alpha = \cos. \alpha.$$

$$\cos. 90 \pm \alpha = \mp \sin. \alpha.$$

$$\sin. 180 \pm \alpha = \mp \sin. \alpha.$$

$$\cos. 180 \pm \alpha = -\cos. \alpha.$$

$$\sin. 270 \pm \alpha = -\cos. \alpha.$$

$$\cos. 270 \pm \alpha = \pm \sin. \alpha.$$

$$\sin. 360 \pm \alpha = \pm \sin. \alpha.$$

$$\cos. 360 \pm \alpha = \cos. \alpha$$

$$\text{tang. } 90 \pm \alpha = \mp \cot. \alpha.$$

$$\cot. 90 \pm \alpha = \mp \text{tang. } \alpha.$$

## Formel.

$$\text{tang. } 180 \pm \alpha = \pm \text{tang. } \alpha.$$

$$\text{cot. } 180 \pm \alpha = \pm \text{cot. } \alpha.$$

$$\text{tang. } 270 \pm \alpha = \mp \text{cot. } \alpha.$$

$$\text{cot. } 270 \pm \alpha = \mp \text{tang. } \alpha.$$

$$\text{tang. } 360 \pm \alpha = \pm \text{tang. } \alpha.$$

$$\text{cot. } 360 \pm \alpha = \pm \text{cot. } \alpha.$$

$$\sin. \alpha^2 + \cos. \alpha^2 = 1.$$

$$\text{tang. } \alpha \cdot \text{cot. } \alpha = 1.$$

$$\text{tang. } \alpha = \frac{\sin. \alpha}{\cos. \alpha}.$$

$$\text{cot. } \alpha = \frac{\cos. \alpha}{\sin. \alpha}.$$

$$\text{sec. } \alpha = \frac{1}{\cos. \alpha}.$$

$$\text{cosec. } \alpha = \frac{1}{\sin. \alpha}.$$

$$\begin{aligned} \sin. \alpha &= \frac{\text{tang. } \alpha}{\sqrt{1 + \text{tang. } \alpha^2}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{1 + \text{cot. } \alpha^2}} \\ &= \frac{2 \text{ tang. } \frac{\alpha}{2}}{1 + \text{tang. } \frac{\alpha^2}{2}} \end{aligned}$$

## Formel.

$$\begin{aligned}
 &= \sqrt{\frac{1 - \cos. 2\alpha}{2}} \\
 \cos. \alpha &= \frac{1}{\sqrt{1 + \tan^2. \alpha^2}} \\
 &= \frac{\cot. \alpha}{\sqrt{1 + \cot^2. \alpha^2}} \\
 &= \frac{1 - \tan^2. \frac{\alpha^2}{2}}{1 + \tan^2. \frac{\alpha^2}{2}} \\
 &= \sqrt{\frac{1 + \cos. 2\alpha}{2}}
 \end{aligned}$$

$$\sin. 2\alpha = 2 \sin. \alpha \cos. \alpha.$$

$$\begin{aligned}
 \cos. 2\alpha &= \cos^2. \alpha - \sin^2. \alpha \\
 &= 1 - 2 \sin^2. \alpha \\
 &= 2 \cos^2. \alpha - 1.
 \end{aligned}$$

$$\sin. 3\alpha = 3 \sin. \alpha - 4 \sin^3. \alpha.$$

$$\cos. 3\alpha = 4 \cos^3. \alpha - 3 \cos. \alpha.$$

$$\sin. \alpha^2 = \frac{1}{2} (1 - \cos. 2\alpha).$$

$$\cos. \alpha^2 = \frac{1}{2} (1 + \cos. 2\alpha).$$

$$\sin. \alpha^3 = \frac{1}{4} (3 \sin. \alpha - \sin. 3\alpha).$$

$$\cos. \alpha^3 = \frac{1}{4} (3 \cos. \alpha + \cos. 3\alpha).$$

## Formel.

$$1 + \cos. \alpha = 2 \cos. \frac{\alpha}{2}.$$

$$1 - \cos. \alpha = 2 \sin. \frac{\alpha}{2}.$$

$$\frac{1 + \cos. \alpha}{\sin. \alpha} = \cot. \frac{\alpha}{2}.$$

$$\frac{1 - \cos. \alpha}{\sin. \alpha} = \tan. \frac{\alpha}{2}.$$

$$\sin. (\alpha \pm \beta) = \sin. \alpha \cos. \beta \pm \cos. \alpha \sin. \beta.$$

$$\cos. (\alpha \pm \beta) = \cos. \alpha \cos. \beta \mp \sin. \alpha \sin. \beta.$$

$$\sin. \alpha + \sin. \beta = 2 \sin. \frac{\alpha + \beta}{2} \cos. \frac{\alpha - \beta}{2}.$$

$$\sin. \alpha - \sin. \beta = 2 \cos. \frac{\alpha + \beta}{2} \sin. \frac{\alpha - \beta}{2}.$$

$$\cos. \alpha + \cos. \beta = 2 \cos. \frac{\alpha + \beta}{2} \cos. \frac{\alpha - \beta}{2}.$$

$$\cos. \alpha - \cos. \beta = 2 \sin. \frac{\alpha + \beta}{2} \sin. \frac{\alpha - \beta}{2}.$$

$$\frac{\sin. \alpha + \sin. \beta}{\cos. \alpha + \cos. \beta} = \tan. \frac{\alpha + \beta}{2}.$$

$$\frac{\sin. \alpha - \sin. \beta}{\cos. \alpha + \cos. \beta} = \tan. \frac{\alpha - \beta}{2}.$$

$$\sin. \alpha^2 - \sin. \beta^2 = \sin. (\alpha + \beta) \sin. (\alpha - \beta).$$

$$\cos. \alpha^2 - \cos. \beta^2 = \sin. (\alpha + \beta) \sin. (\beta - \alpha).$$



## Formel.

$$\text{tang. } (\alpha \pm \beta) = \frac{\text{tang. } \alpha \pm \text{tang. } \beta}{1 \mp \text{tang. } \alpha \text{ tang. } \beta}.$$

$$\text{cot. } (\alpha \pm \beta) = \frac{\text{cot. } \alpha \text{ cot. } \beta \mp 1}{\text{cot. } \alpha \pm \text{cot. } \beta}.$$

$$\text{tang. } 2\alpha = \frac{2 \text{ tang. } \alpha}{1 - \text{tang. } \alpha^2}.$$

$$\begin{aligned} \text{tang. } \alpha &= \frac{2 \text{ tang. } \frac{\alpha}{2}}{1 - \text{tang. } \frac{\alpha^2}{2}}. \\ &= \frac{\sin. 2\alpha}{1 + \cos. 2\alpha}, \\ &= \sqrt{\frac{1 - \cos. 2\alpha}{1 + \cos. 2\alpha}}. \end{aligned}$$

$$\text{cot. } 2\alpha = \frac{\text{cot. } \alpha^2 - 1}{2 \text{ cot. } \alpha}.$$

$$\begin{aligned} \text{cot. } \alpha &= \frac{\text{cot. } \frac{\alpha^2}{2} - 1}{2 \text{ cot. } \frac{\alpha}{2}}, \\ &= \frac{\sin. 2\alpha}{1 - \cos. 2\alpha}, \\ &= \sqrt{\frac{1 + \cos. 2\alpha}{1 - \cos. 2\alpha}}. \end{aligned}$$

---

**Formel.**

---

$$\begin{aligned} \text{tang. } \alpha + \text{tang. } \beta \\ = \frac{\sin. (\alpha \pm \beta)}{\cos. \alpha \cos. \beta} . \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \cot. \alpha \pm \cot. \beta, \\ = \frac{\sin. (\alpha \pm \beta)}{\sin. \alpha \sin. \beta} . \end{aligned}$$

~~~~~


Trigonometrische Formel-Tafel

A. Ebenes Dreieck.

Die scharf ausgezogenen Seiten ———
gegeben.



Die punktierten - - - - - werden



gegebener Winkel,



gesuchter Winkel.

α .	Formel.
	<p style="text-align: center;">Rechtwinkeliges Dreieck.</p> <hr/> $\cos. \alpha = \frac{b}{c},$ $\sin. \beta = \frac{b}{c},$ $\left. \begin{array}{l} a \\ a \\ a \end{array} \right\} = \begin{array}{l} c \sin. \alpha, \\ c \cos. \beta, \\ \sqrt{c^2 - b^2}, \end{array}$ $\alpha = 90^\circ - \beta^\circ,$ $\beta = 90^\circ - \alpha^\circ.$
	$\text{tang. } \alpha = \frac{a}{b},$ $\text{tang. } \beta = \frac{b}{a},$ $\left. \begin{array}{l} c \\ c \\ c \end{array} \right\} = \begin{array}{l} \frac{a}{\sin. \alpha} \\ \frac{b}{\cos. \beta} \\ \sqrt{a^2 + b^2}. \end{array}$ $\alpha = 90^\circ - \beta^\circ,$ $\beta = 90^\circ - \alpha^\circ.$

Figur.	Formel.
<div data-bbox="99 680 350 1115"> </div>	
<div data-bbox="591 449 1078 491"> <p>Rechtwinkeliges Dreieck.</p> </div>	
<div data-bbox="631 638 860 722"> $\sin. \alpha = \frac{a}{c},$ </div>	<div data-bbox="631 743 860 827"> $\cos. \beta = \frac{a}{c},$ </div>
<div data-bbox="682 869 976 911"> $b \left. \begin{array}{l} \\ \end{array} \right\} = c \cdot \sin. \beta,$ </div>	<div data-bbox="682 932 976 974"> $b \left. \begin{array}{l} \\ \end{array} \right\} = c \cdot \cos. \alpha,$ </div>
<div data-bbox="682 995 1006 1058"> $b \left. \begin{array}{l} \\ \end{array} \right\} = \sqrt{c^2 - a^2}.$ </div>	<div data-bbox="711 1079 976 1121"> $\alpha = 90^\circ - \beta^\circ,$ </div>
<div data-bbox="711 1142 976 1184"> $\beta = 90^\circ - \alpha^\circ.$ </div>	
<div data-bbox="84 1346 369 1908"> </div>	<div data-bbox="675 1499 988 1541"> $b = a \cotang. \alpha,$ </div>
<div data-bbox="675 1562 915 1656"> $c = \frac{a}{\sin. \alpha},$ </div>	<div data-bbox="682 1688 952 1730"> $\beta = 90^\circ - \alpha^\circ.$ </div>

Formel.

Rechtwinkeliges Dreieck.

$$b = a \operatorname{tang.} \beta,$$


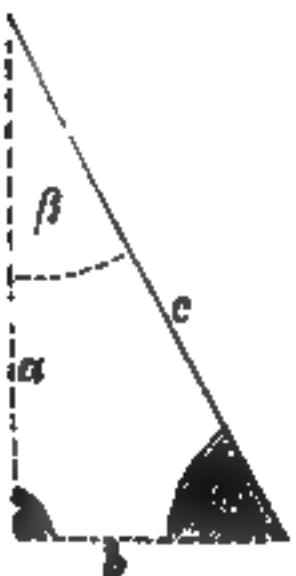
$$c = \frac{a}{\cos. \beta},$$

$$\alpha = 90^\circ - \beta.$$

$$a = b \operatorname{tang.} \alpha,$$

$$c = \frac{b}{\cos. \alpha},$$

$$\beta = 90^\circ - \alpha.$$

Figur.	Formel.
Rechtwinkeliges Dreieck.	
	$a = b \cot. \beta,$ $c = \frac{b}{\sin. \beta},$ $\alpha = 90^\circ - \beta.$
	$a = c \sin. \alpha,$ $b = c \cos. \alpha,$ $\beta = 90^\circ - \alpha.$

Formel.

Rechtwinkeliges Dreieck.

$$a = c \cos. \beta,$$

$$b = c \sin. \beta,$$

$$\alpha = 90^\circ - \beta^\circ.$$

Schiefwinkeliges Dreieck.

$$b = \frac{a \sin. \beta}{\sin. \alpha},$$

$$c = \frac{a \sin. (\alpha + \beta)}{\sin. \alpha},$$

$$\gamma = 180^\circ - (\alpha + \beta)^\circ.$$

Figur.	Formel.
Schiefwinkeliges Dreieck.	
	$b = \frac{a \sin. (\alpha + \gamma)}{\sin. \alpha},$ $c = \frac{a \sin. \gamma}{\sin. \alpha},$ $\beta = 180^\circ - (\alpha + \beta)^\circ.$
	$b = \frac{a \sin. \beta}{\sin. (\beta + \gamma)},$ $c = \frac{a \sin. \gamma}{\sin. (\beta + \gamma)},$ $\alpha = 180^\circ - (\beta + \gamma)^\circ.$

Formel.

Schiefwinkeliges Dreieck.

$$a = \frac{b \sin. \alpha}{\sin. \beta},$$

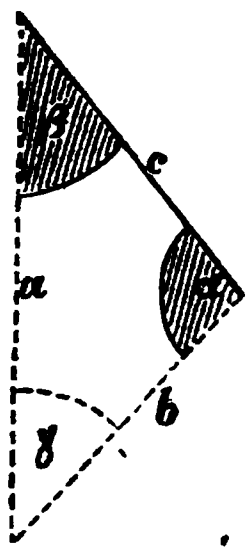
$$c = \frac{b \sin. (\alpha + \beta)}{\sin. \beta},$$

$$\gamma = 180^\circ - (\alpha + \beta)^\circ.$$

$$a = \frac{b \sin. (\beta + \gamma)}{\sin. \beta},$$

$$c = \frac{b \sin. \gamma}{\sin. \beta},$$

$$\alpha = 180^\circ - (\beta + \gamma)^\circ.$$

Figur.	Formel.
Schiefwinkeliges Dreieck.	
	$a = \frac{b \sin. \alpha}{\sin. (\alpha + \gamma)},$ $c = \frac{b \sin. \gamma}{\sin. (\alpha + \gamma)},$ $\beta = 180^\circ - (\alpha + \gamma)^\circ.$

Formel.

Schiefwinkeliges Dreieck.

$$a = \frac{c \sin. \alpha}{\sin. \gamma},$$

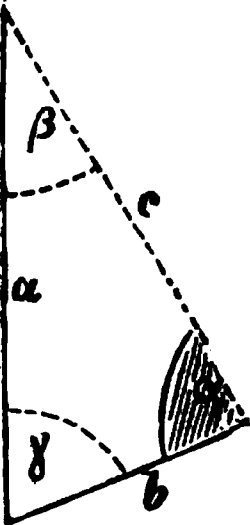
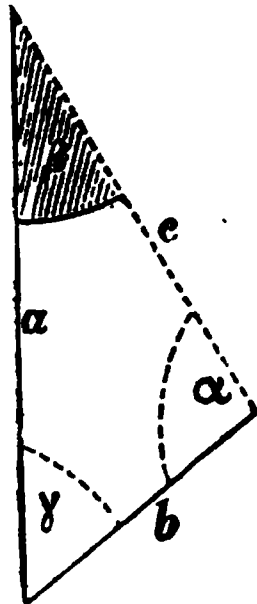
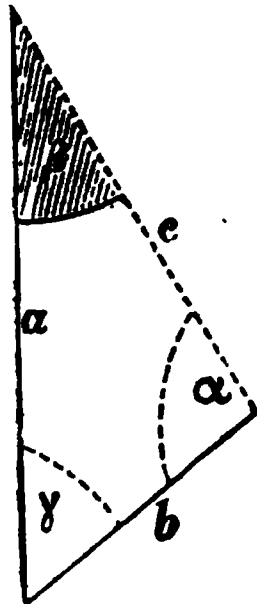
$$b = \frac{c \sin. (\alpha + \gamma)}{\sin. \gamma},$$

$$\beta = 180^\circ - (\alpha + \gamma).$$

$$a = \frac{c \sin. (\beta + \gamma)}{\sin. \gamma},$$

$$b = \frac{c \sin. \beta}{\sin. \gamma},$$

$$\alpha = 180^\circ - (\beta + \gamma).$$

Figur.	Formel.
	<p style="text-align: center;">Schiefwinkeliges Dreieck.</p>
	$\sin. \beta = \frac{b \sin. \alpha}{a},$ $\gamma = 180^\circ - (\alpha + \beta)^\circ.$ $c = \frac{a \sin. \gamma}{\sin. \alpha},$
	$\sin. \alpha = \frac{a \sin. \beta}{b}.$ $\gamma = 180^\circ - (\alpha + \beta)^\circ.$ $c = \frac{a \sin. \gamma}{\sin. \alpha}.$

Formel.

Schiefwinkeliges Dreieck.

$$c = \sqrt{a^2 + b^2 - 2ab \cos \gamma}.$$

$$\operatorname{tang.} \left(\frac{\alpha - \beta}{2} \right) = \frac{a - b}{a + b} \cot. \frac{\gamma}{2}$$

$$(\alpha + \beta)^{\circ} = 180^{\circ} - \gamma^{\circ}.$$

Aus: $\frac{\alpha - \beta}{2}$ und $\alpha + \beta$

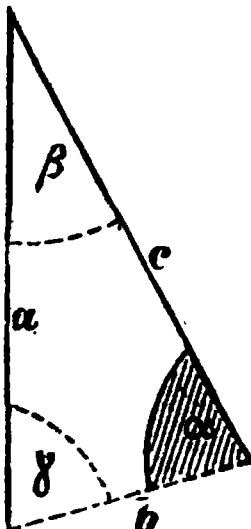
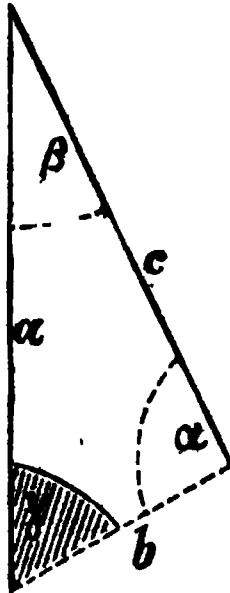
ergibt sich α und β einzeln.

Um c durch Logarithmen zu berechnen, berechne man zuerst ein Hilfs φ :

$$\operatorname{tang.} \varphi = \frac{2 \sin. \frac{1}{2} \gamma \sqrt{ab}}{(a - b)}$$

und nehme alsdann:

$$c = \frac{(a - b)}{\cos. \varphi}.$$

Figur.	Formel.
Schiefwinkeliges Dreieck.	
	$\sin. \gamma = \frac{c \sin. \alpha}{a},$ $\beta^{\circ} = 180^{\circ} - (\alpha + \gamma)^{\circ},$ $b = \frac{a \sin. \beta}{\sin. \alpha}.$
	$\sin. \alpha = \frac{a \sin. \gamma}{c},$ $\beta^{\circ} = 180^{\circ} - (\alpha + \gamma)^{\circ},$ $b = \frac{a \sin. \beta}{\sin. \alpha}.$

Formel.

Schiefwinkeliges Dreieck.

$$b = \sqrt{a^2 + c^2 - 2ac \cos. \beta.}$$

$$\text{tang.} \left(\frac{\alpha - \gamma}{2} \right) = \frac{a - c}{a + c} \cdot \cot. \frac{\beta}{2}.$$

$$(\alpha + \gamma)^{\circ} = 180^{\circ} - \beta.$$

Aus: $\frac{\alpha - \gamma}{2}$ und $(\alpha + \gamma)$


ergibt sich α und γ einzeln.

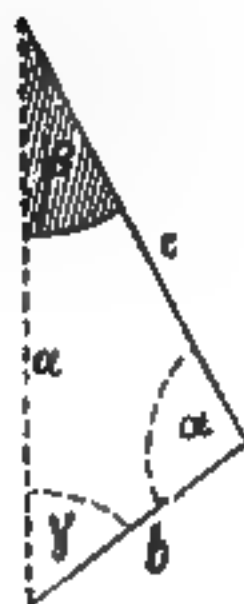
Um b durch Logarithmen zu ermitteln, berechne man zuerst einen Hilfs $\angle \varphi$:

$$\text{tang.} \varphi = \frac{2 \sin. \frac{1}{2} \beta (a c)}{a - c}$$

und nehme dann:

$$b = \frac{a - c}{\cos. \varphi}.$$

Figur.	Formel.
	<p style="text-align: center;">Schiefwinkeliges Dreieck.</p> $\sin. \beta = \frac{b \sin. \gamma}{c},$ $\alpha^{\circ} = 180^{\circ} - (\beta + \gamma)^{\circ},$ $a = \frac{b \sin. \alpha}{\sin. \beta}.$



$$\sin. \gamma = \frac{c \sin. \beta}{b}$$

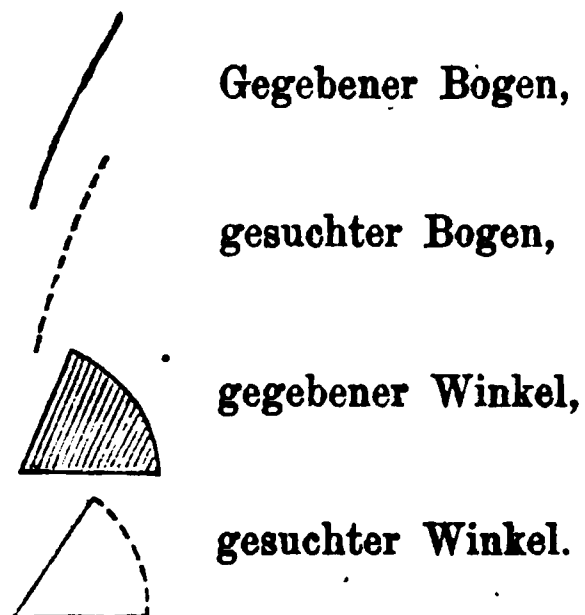
$$\alpha^{\circ} = 180^{\circ} - (\beta + \gamma)^{\circ},$$

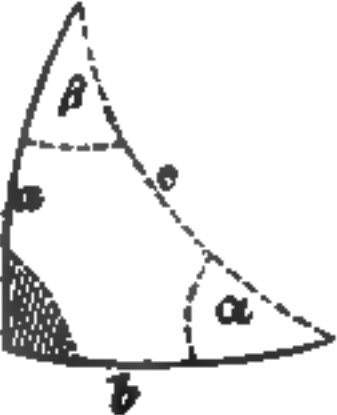
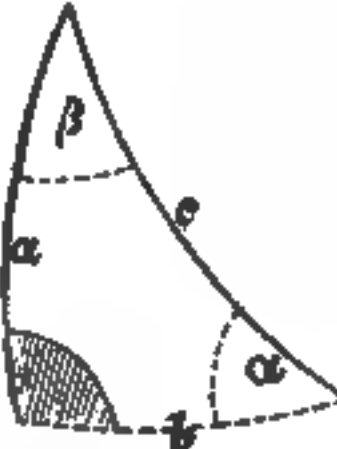
$$a = \frac{b \sin. \alpha}{\sin. \beta}.$$

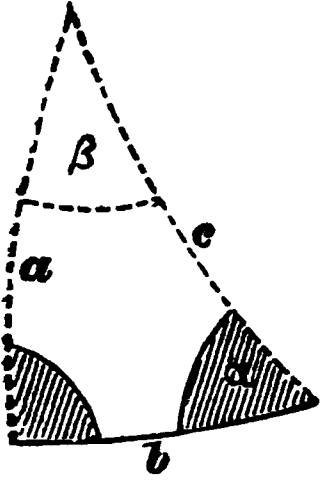
Figur.	Formel.
Wie vor.	$(a + b) \sin. \frac{\gamma}{2} = c \cos. \frac{\alpha - \beta}{2},$ $(a - b) \cos. \frac{\gamma}{2} = c \sin. \frac{\alpha - \beta}{2},$ $\frac{(a + b)}{(a - b)} = \frac{\text{tang. } \frac{\alpha + \beta}{2}}{\text{tang. } \frac{\alpha - \beta}{2}}.$
	<p>Ist r der Radius des um ein \triangle beschriebenen Kreises und ϱ der des eingeschriebenen Kreises, so ist, wenn F den Flächeninhalt des \triangle bezeichnet:</p> $r = \frac{a b c}{4 F}; \quad \varrho = \frac{2 F}{a + b + c}$ $2 r \varrho = \frac{a b c}{a + b + c}.$
	<p>Sind d und d' die Diagonalen eines Viereckes und α der von ihnen eingeschlossene \sphericalangle, so ist:</p> $F = \frac{1}{2} d \cdot d' \sin. \alpha.$ <p>Ist das Viereck ein in den Kreis beschriebenes mit den Seiten $a b c d$, so ist:</p> $F = \frac{1}{2} (a b + c d) \sin. \gamma$ $= \sqrt{\frac{1}{2} s - a \cdot \frac{1}{2} s - b \cdot \frac{1}{2} s - c \cdot \frac{1}{2} s - d \cdot \frac{1}{2} s}$ $d \cdot d' = a c + b d.$

Trigonometrische Formel-Tafel.

B. Sphärisches Dreieck.



Figur.	Formel.
Rechtwinkeliges Dreieck.	
	$\cos. c = \cos. a \cos. b$ $\text{tang. } \alpha = \frac{\text{tang. } a}{\sin. b}$ $\text{tang. } \beta = \frac{\text{tang. } b}{\sin. a}$
	$\cos. b = \frac{\cos. c}{\cos. a}$ $\sin. \alpha = \frac{\sin. a}{\sin. c}$ $\cos. \beta = \text{tang. } a \cot. c.$

Figur.	Formel.
Rechtwinkeliges Dreieck.	
	$\sin. b = \text{tang. } a \cot. \alpha$ $\sin. c = \frac{\sin. a}{\sin. \alpha}$ $\sin. \beta = \frac{\cos. \alpha}{\cos. a}$ $\text{tang. } a = \sin. b \text{ tang. } \alpha$ $\text{tang. } c = \frac{\text{tang. } b}{\cos. \alpha}$ $\cos. \beta = \cos. b \sin. \alpha.$

Formel.

Rechtwinkeliges Dreieck.

$$\sin. a = \sin. c \sin. \alpha$$

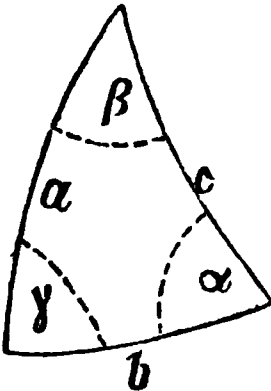
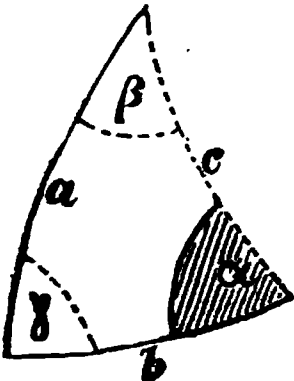
$$\text{tang. } b = \text{tang. } c \cos. \alpha$$

$$\cot. \beta = \cos. c \text{ tang. } \alpha.$$

$$\cos. a = \frac{\cos. \alpha}{\sin. \beta},$$

$$\cos. b = \frac{\cos. \beta}{\sin. \alpha},$$

$$\cos. c = \cot. \alpha \cot. \beta.$$

Figur.	Formel.
	Schiefwinkeliges Dreieck.
	<p>Setze: $\frac{a + b + c}{2} = s.$</p> $\cos. \frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{\sin. s \sin. s - a}{\sin. b \sin. c}},$ $\cos. \frac{\beta}{2} = \sqrt{\frac{\sin. s \sin. s - b}{\sin. a \sin. c}},$ $\cos. \frac{\gamma}{2} = \sqrt{\frac{\sin. s \sin. s - c}{\sin. b \sin. a}}.$
	$\sin. \beta = \frac{\sin. b \sin. \alpha}{\sin. a},$ $\text{tang. } \frac{c}{2} = \frac{\text{tang. } \frac{a-b}{2} \sin. \frac{\alpha + \beta}{2}}{\sin. \frac{\alpha - \beta}{2}},$ $\text{tang. } \frac{\gamma}{2} = \frac{\sin. \frac{a-b}{2}}{\text{tang. } \frac{\alpha - \beta}{2} \sin. \frac{a+b}{2}}.$

Formel.

Schiefwinkeliges Dreieck.

$$\text{tang. } \frac{\alpha - \beta}{2} = \cot. \frac{\gamma}{2} \frac{\sin. \frac{a - b}{2}}{\sin. \frac{a + b}{2}},$$

$$\text{tang. } \frac{\alpha + \beta}{2} = \cot. \frac{\gamma}{2} \frac{\cos. \frac{a - b}{2}}{\cos. \frac{a + b}{2}},$$

Hieraus:

$$\alpha = \frac{\alpha + \beta}{2} + \frac{\alpha - \beta}{2},$$

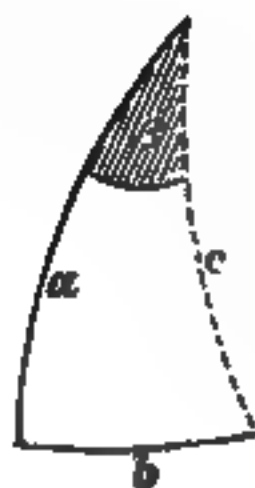
$$\beta = \frac{\alpha + \beta}{2} - \frac{\alpha - \beta}{2},$$

$$\sin. c = \frac{\sin. a \sin. \gamma}{\sin. \alpha},$$

oder:

$$\begin{aligned} \cos. c &= \cos. a \cos. b \\ &+ \sin. a \sin. b \cos. \gamma. \end{aligned}$$

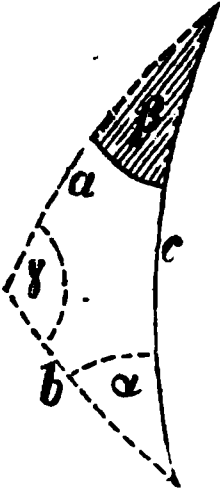
Figur.	Formel.
<div data-bbox="151 659 404 1016" data-label="Image"> </div>	
<div data-bbox="151 1394 416 1772" data-label="Image"> </div>	
<p data-bbox="646 422 1141 474" style="text-align: center;">Schiefwinkeliges Dreieck.</p> $\frac{\alpha + \beta + \gamma}{2} = \sigma \text{ gesetzt.}$ $\cos. \frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{\cos. \sigma - \beta \cos. \sigma - \gamma}{\sin. \beta \sin. \gamma}},$ $\cos. \frac{\beta}{2} = \sqrt{\frac{\cos. \sigma - \alpha \cos. \sigma - \gamma}{\sin. \alpha \sin. \gamma}},$ $\cos. \frac{\gamma}{2} = \sqrt{\frac{\cos. \sigma - \alpha \sin. \sigma - \beta}{\sin. \alpha \sin. \beta}}.$	
$\sin. b = \frac{\sin. \beta \sin. a}{\sin. \alpha},$ $\text{tang. } \frac{c}{2} = \frac{\text{tang. } \frac{a-b}{2} \sin. \frac{\alpha + \beta}{2}}{\sin. \frac{\alpha - \beta}{2}},$ $\text{tang. } \frac{\gamma}{2} = \frac{\sin. \frac{a-b}{2}}{\text{tang. } \frac{\alpha - \beta}{2} \sin. \frac{a+b}{2}}.$	



$$\cos. c \cos. \varphi = \frac{\cos. a \cos. b}{\cos. \varphi}.$$

Für den Hilfs $\angle \varphi$:

$$\text{tang. } \varphi = \text{tang. } b \cos. \gamma.$$

Figur.	Formel.
	Schiefwinkeliges Dreieck.
	$\text{tang. } \frac{a - b}{2} = \text{tang. } \frac{c}{2} \frac{\sin. \frac{\alpha - \beta}{2}}{\sin. \frac{\alpha + \beta}{2}}.$
	$\text{tang. } \frac{a + b}{2} = \text{tang. } \frac{c}{2} \frac{\cos. \frac{\alpha - \beta}{2}}{\cos. \frac{\alpha + \beta}{2}}.$
	<p>Hieraus:</p>
	$a = \frac{a + b}{2} + \frac{a - b}{2},$ $b = \frac{a + b}{2} - \frac{a - b}{2},$ $\sin. \gamma = \frac{\sin. c \sin. \alpha}{\sin. a},$
	<p>oder:</p> $\cos. \gamma = -\cos. \alpha \cos. \beta$ $+ \sin. \alpha \sin. \beta \cos. c.$

Figur.	Formel.
Schiefwinkeliges Dreieck.	
Wie vor.	$\text{I. } \frac{\cos. \frac{1}{2} (\alpha - \beta)}{\sin. \frac{1}{2} \gamma} = \frac{\sin. \frac{1}{2} (a + b)}{\sin. \frac{1}{2} a}.$
	$\text{II. } \frac{\cos. \frac{1}{2} (\alpha + \beta)}{\sin. \frac{1}{2} \gamma} = \frac{\cos. \frac{1}{2} (a + b)}{\cos. \frac{1}{2} c},$
	$\text{III. } \frac{\sin. \frac{1}{2} (\alpha - \beta)}{\cos. \frac{1}{2} \gamma} = \frac{\sin. \frac{1}{2} (a - b)}{\sin. \frac{1}{2} c},$
	$\text{IV. } \frac{\sin. \frac{1}{2} (\alpha + \beta)}{\cos. \frac{1}{2} \gamma} = \frac{\cos. \frac{1}{2} (a - b)}{\cos. \frac{1}{2} c},$
<p style="text-align: center;">Flächeninhalt:</p> $F = \frac{\alpha + \beta + \gamma - 180}{180} r^2 \pi.$	

Tafel der trigonometrischen Linien und deren Logarithmen.



Trigonometrische Tafeln.

Einrichtung und Gebrauch der trigonometrischen Tabellen.

Die erste der folgenden Tabellen gibt die vier trigonometrischen Linien Sinus, Cosinus, Tangente und Cotangente aller Winkel von 0° bis 90° mit Interwallen von 10 zu 10 Minuten an; die zweite Tabelle enthält die Logarithmen dieser Grössen. Jede dieser Tabellen besteht aus 8 Vertikalkolumnen, wovon die ersten und die letzten zwei, die Grade und Minuten ausdrücken und die mittleren vier die entsprechenden Werthe der trigonometrischen Linien, oder die Logarithmen derselben angeben. Die Grade und Minuten und die zugehörigen trigonometrischen Linien bilden eine horizontale Zeile. Die Winkel unter 45° sind in den ersten zwei und die über 45° Grad in den letzten Vertikalkolumnen enthalten. Auf jene beziehen sich die Ueber-, auf diese die Unterschriften der mittleren Vertikalkolumnen. Die Zahlen zwischen je sechs, einem ganzen Grade entsprechenden Zeilen sind die Differenzen von je zwei auf einander folgenden trigonometrischen Linien. Man findet von einem Winkel unter 45° die ent-

sprechenden trigonometrischen Linien, oder die Logarithmen dieser, wenn man diese Winkel in der vordersten Vertikalkolumne aufsucht, und von der gefundenen Stelle aus horizontal herübergeht bis in die Vertikalkolumne, deren Aufschrift mit dem Namen der gesuchten Linie übereinstimmt. So gibt z. B. die Tafel No. 1 $\sin. 11^\circ, 20' = 0,1965$; $\cos. 11^\circ, 20' = 0,9805$ u. s. w., weil diese Zahlen in den mit Sinus und Cosinus überschriebenen Vertikalkolumnen und zugleich in der Zeile enthalten sind, die mit $11^\circ, 20'$ anfängt. Ebenso ist $\cos. 34^\circ, 50' = 0,8208$ und $\text{tang. } 34^\circ, 50' = 0,6959$, endlich $\text{cotang. } 41^\circ, 30' = 1,1303$. Ebenso findet man in der Tafel No. 2, $\log. \sin. 26^\circ, 30' = 9,64953$; $\log. \cos. 26^\circ, 30' = 9,95179$, ferner $\log. \text{tang. } 17^\circ, 40' = 9,50311$, $\log. \text{cotang. } 39^\circ, 10' = 10,08905$. Für einen Winkel über 45° findet man hingegen die entsprechende trigonometrische Linie oder deren Logarithmen, wenn man die gegebene Grad- und Minutenzahl in den hintersten Vertikalkolumnen aufsucht, und von da aus horizontal herüber geht, bis man in die Vertikalkolumne kommt, an deren Fuss der Name der gesuchten Linie steht. Hiernach findet man in der ersten Tabelle $\sin. 48^\circ, 10' = 0,7451$, und $\cos. 48^\circ, 10' = 0,6670$, weil diese Zahlen in der Zeile stehen, an deren Ende $48^\circ, 10'$ zu lesen ist und zugleich in Vertikalreihen enthalten sind, an deren Fuss die Namen Sinus und Cosinus zu finden sind. Ebenso findet man $\cos. 61^\circ, 30' = 0,4772$, $\text{tang. } 61^\circ, 30' = 1,8418$, und $\text{cotang. } 76^\circ, 40' = 0,2370$. Auf gleiche Weise findet man in der zweiten Tabelle $\log. \sin. 50^\circ, 40' = 9,88844$, $\log. \text{tang. } 50^\circ, 40' = 10,08647$, $\log. \cos. 81^\circ, 10' = 9,18628$, $\log. \text{cotang. } 68^\circ, 30' = 9,59540$.

Uebrigens ist $\sin. 50^\circ, 40'$ auch $= \cos. 39^\circ, 20'$, ferner $\cos. 61^\circ, 30' = \sin. 28^\circ, 30'$ $\text{cotang. } 68^\circ, 30' = \text{tang. } 21^\circ, 30'$ u. s. w., weil von zwei Winkeln, deren Summe 90° beträgt, der Sinus des einen gleich dem Cosinus des andern, auch Tangente des einen gleich Cotangente des andern ist u. s. w.

Sind die Winkel bis auf Minuten genau gegeben, so hat man die in den Tabellen enthaltenen Werthe der trigonometrischen Linien mit Hilfe der Differenzen zu ergänzen, indem man das Interpolationsverfahren einschlägt. Hiernach ist:

$$\sin. 18^{\circ}, 13' = \sin. 18^{\circ}, 10' + 0,3 \cdot 28 = \left\{ \begin{matrix} 0,3118 \\ \dots 8 \end{matrix} \right\} = 0,3126;$$

$$\sin. 56^{\circ}, 27' = \left\{ \begin{matrix} 0,8323 \\ \dots 11 \end{matrix} \right\} = 0,8334,$$

$$\text{tang. } 43^{\circ}, 34' = \left\{ \begin{matrix} 0,9490 \\ \dots 22 \end{matrix} \right\} = 0,9512, \text{ ferner}$$

$$\log. \sin. 26^{\circ}, 16' = 9,64442 + 0,6 \cdot 256 = \left\{ \begin{matrix} 9,64442 \\ 154 \end{matrix} \right\} = 9,64596,$$

$$\log. \text{tang. } 46^{\circ}, 21' = \left\{ \begin{matrix} 10,02022 \\ 25 \end{matrix} \right\} = 10,02047,$$

Da der Cosinus und die Cotangente abnehmen, wenn der Winkel wächst, so hat man bei denselben die Tabellenwerthe durch Subtraktion zu korrigiren. Es ist hiernach

$$\cos. 18^{\circ}, 14' = \cos. 18^{\circ}, 14' - 0,4 \cdot 9 = \left\{ \begin{matrix} 0,9502 \\ 4 \end{matrix} \right\} = 0,9498;$$

$$\cos. 63^{\circ}, 25' = \left\{ \begin{matrix} 0,4488 \\ 13 \end{matrix} \right\} = 0,4475,$$

$$\text{cotang. } 34^{\circ}, 28' = \left\{ \begin{matrix} 1,4641 \\ 73 \end{matrix} \right\} = 1,4568, \text{ ferner}$$

$$\log. \cos. 35^{\circ}, 52' = \left\{ \begin{matrix} 9,90887 \\ 18 \end{matrix} \right\} = 9,90869, \text{ und}$$

$$\log. \text{cotang. } 62^{\circ}, 37' = \left\{ \begin{matrix} 9,71648 \\ 217 \end{matrix} \right\} = 9,71431.$$

Umgekehrt dienen die in Rede stehenden Tabellen auch dazu, um aus einer gegebenen trigonometrischen Linie oder ihrem Logarithmus den entsprechenden Winkel zu finden. In diesem Falle sucht man den gegebenen Zahlenwerth in derjenigen Vertikalkolumne auf, welche den Namen desselben am Kopfe oder Fusse trägt, und geht von da links oder rechts herüber in die Grad- und Minutenkolumnen. Hiernach ist z. B.

$$\text{für } \sin. x = 0,5568, x = 33^{\circ}, 50',$$

für $\sin. x = 0,7916$, $x = 52^\circ, 20'$,
 für $\cos. x = 0,7604$, $x = 40^\circ, 30'$,
 für $\text{tang. } x = 2,6746$, $x = 69^\circ, 30'$,
 für $\text{cotang. } x = 1,5301$, $x = 33^\circ, 10'$; ferner
 für $\log. \sin. x = 9,29340$, $x = 11^\circ, 20'$,
 für $\log. \sin. x = 9,98901$, $x = 77^\circ, 10'$,
 für $\log. \text{tang. } x = 10,47548$, $x = 71^\circ, 30'$,
 für $\log. \text{cotang. } x = 9,98484$, $x = 46^\circ, 0'$.

In der Regel ist die gegebene Grösse nicht genau in den Tabellen enthalten, und daher zur schärfern Bestimmung des Winkels das Interpoliren anzuwenden. Bei den Sinus und Tangenten nehme man den der nächst kleineren, bei den Cosinus und Cotangenten aber den der nächst grösseren Zahl entsprechenden Winkel; dann dividire man die zehnfache Differenz beider Zahlen durch die Differenz, welche die Tafeln für zwei benachbarte Zahlen angeben, und endlich setze man den Quotienten zu den Minuten des erst aus den Tafeln genommenen Winkels. So ist z. B. für

$$\begin{aligned}
 \sin. x &= 0,3679, x = 21^\circ, 30' + (3679 - 3665) \cdot \frac{10'}{27} \\
 &= 21^\circ, 30' + \frac{140'}{27} = 21^\circ, 35', 2; \text{ nämlich der nächst}
 \end{aligned}$$

kleineren Zahl 0,3665 entspricht $x = 21^\circ, 30'$, der Quotient aus der zehnfachen Differenz von dieser und der gegebenen Zahl 0,3679 ist 140 und die von der Tabelle angegebene Differenz ist 27, folglich der Quotient beider = 5,2. Wenn ferner $\text{tang. } x = 0,9152$ ist, so hat man

$$x = 42^\circ, 20' + (52 - 10) \frac{10'}{53} = \left\{ \begin{array}{l} 42^\circ, 20' \\ 8 \end{array} \right\} = 42^\circ, 28';$$

$$\begin{aligned}
 \text{wenn } \cos. x &= 0,6095, \text{ so hat man } x = 52^\circ, 20' + (111 - 95) \frac{10'}{23} \\
 &= \left\{ \begin{array}{l} 52^\circ, 20' \\ 7 \end{array} \right\} = 52^\circ, 27', \text{ und wenn } \text{cotang. } x = 1,5630
 \end{aligned}$$

$$\text{ist, so folgt } x = 32^\circ, 30' + (697 - 630) \frac{10'}{101}$$

$$= \left\{ \begin{matrix} 32^{\circ}, 30' \\ 6,6 \end{matrix} \right\} = 32^{\circ}, 36', 6. \text{ Ferner für } \log. \sin. x = 9,75344$$

$$\text{ist } x = 34^{\circ}, 30' + (44-13) \frac{10'}{183} = \left\{ \begin{matrix} 34^{\circ}, 30' \\ 1', 7 \end{matrix} \right\} = 34^{\circ}, 31', 7;$$

$$\text{für } \log. \tan. x = 11,12537, x = 85^{\circ}, 40' + (537-047) \frac{10'}{1710}$$

$$= \left\{ \begin{matrix} 85^{\circ}, 40' \\ 3' \end{matrix} \right\} = 85^{\circ}, 43'; \text{ für } \log. \cos. x = 9,72104$$

$$\text{ist } x = 5^{\circ}, 10' + \frac{2180-1040}{204} = \left\{ \begin{matrix} 58^{\circ}, 10' \\ 5 \end{matrix} \right\} = 58^{\circ}, 15';$$

$$\text{endlich für } \log. \cotang. x = 10,28853,$$

$$x = 27^{\circ}, 10' + \frac{9720-8530}{311} = \left\{ \begin{matrix} 27^{\circ}, 10' \\ 3,5 \end{matrix} \right\} = 27^{\circ}, 13', 5.$$

1. Tafel der trigonometrischen Linien.

Winkel.		Sinus.	Cosinus.	Tang.	Cotang.	Winkel.	
Gr.	Min.					Gr.	Min.
0	0	0,0000	1,0000	0,0000	∞	90	0
	10	0,0029	1,0000	0,0029	343,77		50
	20	0,0058	1,0000	0,0058	171,89		40
	30	0,0087	1,0000	0,0087	114,59		30
	40	0,0116	0,9999	0,0116	85,940		20
	50	0,0145	0,9999	0,0145	68,750		10
1		29	1	29	11,460	89	
	0	0,0175	0,9998	0,0175	57,290		0
	10	0,0204	0,9998	0,0204	49,104		50
	20	0,0233	0,9997	0,0233	42,964		40
	30	0,0262	0,9997	0,0262	38,188		30
	40	0,0291	0,9996	0,0291	34,368		20
2		50	0,0320	0,9995	31,242	88	
		29	1	29	2,606		
	0	0,0349	0,9994	0,0349	28,636		0
	10	0,0378	0,9993	0,0378	26,432		50
	20	0,0407	0,9992	0,0407	24,542		40
	30	0,0436	0,9990	0,0437	22,904		30
3		40	0,0465	0,9989	21,470	87	
		50	0,0494	0,9988	20,206		
		29	1	29	1,125		
	0	0,0523	0,9986	0,0524	19,081		0
	10	0,0552	0,9985	0,0553	18,075		50
	20	0,0581	0,9983	0,0582	17,169		40
4		30	0,0610	0,9981	16,350	86	
		40	0,0640	0,9980	15,605		
		50	0,0669	0,9978	14,924		
		29	2	29	623		
	0	0,0698	0,9976	0,0699	14,301		0
	10	0,0727	0,9974	0,0729	13,727		50
5		20	0,0756	0,9971	13,197	85	
		30	0,0785	0,9969	12,706		
		40	0,0814	0,9967	12,251		
		50	0,0843	0,9964	11,826		
		29	2	29	396		
	0	0,0872	0,9962	0,0875	11,430		0
Gr.	Min.					Gr.	Min.
Winkel.		Cosinus.	Sinus.	Cotang.	Tang.	Winkel.	

1. Tafel der trigonometrischen Linien.

Winkel.		Sinus.	Cosinus.	Tang.	Cotang.	Winkel.	
Gr.	Min.					Gr.	Min.
5	0	0,0872	0,9962	0,0875	11,430	85	0
	10	0,0901	0,9959	0,0904	11,059		50
	20	0,0929	0,9957	0,0934	10,712		40
	30	0,0958	0,9954	0,0963	10,385		30
	40	0,0987	0,9951	0,0992	10,078		20
	50	0,1016	0,9948	0,1022	9,7882		10
6		29	3	29	2738	84	
	0	0,1045	0,9945	0,1051	9,5144		0
	10	0,1074	0,9942	0,1080	9,2553		50
	20	0,1103	0,9939	0,1110	9,0098		40
	30	0,1132	0,9936	0,1139	8,7769		30
	40	0,1161	0,9932	0,1169	8,5555		20
7		50	0,1190	0,9929	8,3450	83	10
		29	4	29	2007		
	0	0,1219	0,9925	0,1228	8,1443		0
	10	0,1248	0,9922	0,1257	7,9530		50
	20	0,1276	0,9918	0,1287	7,7704		40
	30	0,1305	0,9914	0,1317	7,5958		30
8		40	0,1334	0,9911	7,4287	82	20
		50	0,1363	0,9907	7,2687		10
		29	4	29	1533		
	0	0,1392	0,9903	0,1405	7,1154		0
	10	0,1421	0,9899	0,1435	6,9682		50
	20	0,1449	0,9894	0,1465	6,8269		40
9		30	0,1478	0,9890	6,6912	81	30
		40	0,1507	0,9886	6,5606		20
		50	0,1536	0,9881	6,4348		10
		28	4	30	1210		
	0	0,1564	0,9877	0,1584	6,3188		0
	10	0,1593	0,9872	0,1614	6,1970		50
10		20	0,1622	0,9868	6,0844	80	40
		30	0,1650	0,9863	5,9758		30
		40	0,1679	0,9858	5,8708		20
		50	0,1708	0,9853	5,7694		10
		28	5	30	981		
	0	0,1736	0,9848	0,1763	5,6713		0
Gr.	Min.					Gr.	Min.
Winkel.		Cosinus.	Sinus.	Cotang.	Tang.	Winkel.	

1. Tafel der trigonometrischen Linien.

Winkel.		Sinus.	Cosinus.	Tang.	Cotang.	Winkel.	
Gr.	Min.					Gr.	Min.
10	0	0,1786	0,9848	0,1763	5,6713	80	0
	10	0,1765	0,9843	0,1793	5,5764		50
	20	0,1794	0,9838	0,1823	5,4845		40
	30	0,1822	0,9833	0,1853	5,3955		30
	40	0,1851	0,9827	0,1883	5,3093		20
	50	0,1880	0,9822	0,1914	5,2257		10
11		28	6	30	811	79	
	0	0,1908	0,9816	0,1944	5,1446		0
	10	0,1937	0,9811	0,1974	5,0658		50
	20	0,1965	0,9805	0,2004	4,9894		40
	30	0,1994	0,9799	0,2035	4,9152		30
	40	0,2022	0,9793	0,2065	4,8430		20
12		50	0,2051	0,9787	0,2095	78	
		28	6	31	683		
	0	0,2079	0,9781	0,2126	4,7729		0
	10	0,2108	0,9775	0,2156	4,7046		50
	20	0,2136	0,9769	0,2186	4,6382		40
	30	0,2164	0,9763	0,2217	4,5736		30
13		40	0,2193	0,9757	0,2247	77	
		50	0,2221	0,9750	0,2278		
		28	6	31	582		
	0	0,2250	0,9744	0,2309	4,3897		0
	10	0,2278	0,9737	0,2339	4,3315		50
	20	0,2306	0,9730	0,2370	4,2747		40
14		30	0,2334	0,9724	0,2401	76	
		40	0,2363	0,9717	0,2432		
		50	0,2391	0,9710	0,2462		
		28	7	31	439		
	0	0,2419	0,9703	0,2493	4,0611		0
	10	0,2447	0,9696	0,2524	4,0108		50
15		20	0,2476	0,9689	0,2555	75	
		30	0,2504	0,9681	0,2586		
		40	0,2532	0,9674	0,2617		
		50	0,2560	0,9667	0,2648		
		28	7	31	3,8667		
	0	0,2588	0,9659	0,2679	3,8208		0
Gr.	Min.					Gr.	Min.
Winkel.		Cosinus.	Sinus.	Cotang.	Tang.	Winkel.	

1) Tafel der trigonometrischen Linien.

Winkel.		Sinus.	Cosinus.	Tang.	Cotang.	Winkel.	
Gr.	Min.					Gr.	Min.
15	0	0,2588	0,9659	0,2679	3,7321	75	0
	10	0,2616	0,9652	0,2711	3,6891		50
	20	0,2644	0,9644	0,2742	3,6470		40
	30	0,2672	0,9636	0,2773	3,6059		30
	40	0,2700	0,9628	0,2805	3,5656		20
	50	0,2728	0,9621	0,2836	3,5261		10
16		28	8	31	387	74	
	0	0,2756	0,9613	0,2867	3,4874		0
	10	0,2784	0,9605	0,2899	3,4495		50
	20	0,2812	0,9596	0,2931	3,4124		40
	30	0,2840	0,9588	0,2962	3,3759		30
	40	0,2868	0,9580	0,2994	3,3402		20
17		50	0,2896	0,9572	0,3026	73	10
		28	9	31	343		
	0	0,2924	0,9563	0,3057	3,2709		0
	10	0,2952	0,9555	0,3089	3,2371		50
	20	0,2979	0,9546	0,3121	3,2041		40
	30	0,3007	0,9537	0,3153	3,1716		30
18		40	0,3035	0,9528	0,3185	72	20
		50	0,3062	0,9520	0,3217		10
		28	9	32	307		
	0	0,3090	0,9511	0,3249	3,0777		0
	10	0,3118	0,9502	0,3281	3,0475		50
	20	0,3145	0,9492	0,3314	3,0178		40
19		30	0,3173	0,9483	0,3346	71	30
		40	0,3201	0,9474	0,3378		20
		50	0,3228	0,9465	0,3411		10
		27	10	32	277		
	0	0,3256	0,9455	0,3443	2,9042		0
	10	0,3283	0,9446	0,3476	2,8770		50
20		20	0,3311	0,9436	0,3508	70	40
		30	0,3338	0,9426	0,3541		30
		40	0,3365	0,9417	0,3574		20
		50	0,3393	0,9407	0,3607		10
		27	10	33	250		
	0	0,3420	0,9397	0,3640	2,7475		0
Gr.	Min.					Gr.	Min.
Winkel.		Cosinus.	Sinus.	Cotang.	Tang.	Winkel.	

1. Tafel der trigonometrischen Linien.

Winkel.		Sinus.	Cosinus.	Tang.	Cotang.	Winkel.	
Gr.	Min.					Gr.	Min.
20	0	0,3420	0,9397	0,3640	2,7475	70	0
	10	0,3448	0,9387	0,3673	2,7228		50
	20	0,3475	0,9377	0,3706	2,6985		40
	30	0,3502	0,9367	0,3739	2,6746		30
	40	0,3529	0,9356	0,3772	2,6511		20
	50	0,3557	0,9346	0,3805	2,6279		10
21	27		10	34	228	69	
	0	0,3584	0,9336	0,3839	2,6051		0
	10	0,3611	0,9325	0,3872	2,5826		50
	20	0,3638	0,9315	0,3906	2,5605		40
	30	0,3665	0,9304	0,3939	2,5386		30
	40	0,3692	0,9293	0,3973	2,5172		20
22	50	0,3719	0,9283	0,4006	2,4960	68	10
	27		11	34	209		
	0	0,3746	0,9272	0,4040	2,4751		0
	10	0,3773	0,9261	0,4074	2,4545		50
	20	0,3800	0,9250	0,4108	2,4342		40
	30	0,3827	0,9239	0,4142	2,4142		30
23	40	0,3854	0,9228	0,4176	2,3945	67	20
	50	0,3881	0,9216	0,4210	2,3750		10
	27		11	35	191		
	0	0,3907	0,9205	0,4245	2,3559		0
	10	0,3934	0,9194	0,4279	2,3369		50
	20	0,3961	0,9182	0,4314	2,3183		40
24	30	0,3987	0,9171	0,4348	2,2998	66	30
	40	0,4014	0,9159	0,4383	2,2817		20
	50	0,4041	0,9147	0,4417	2,2637		10
	26		12	35	177		
	0	0,4067	0,9135	0,4452	2,2460		0
	10	0,4094	0,9124	0,4487	2,2286		50
25	20	0,4120	0,9112	0,4522	2,2113	65	40
	30	0,4147	0,9100	0,4557	2,1943		30
	40	0,4173	0,9088	0,4592	2,1775		20
	50	0,4200	0,9075	0,4628	2,1609		10
	26		12	35	164		
	0	0,4226	0,9063	0,4663	2,1445		0
Gr.	Min.					Gr.	Min.
Winkel.		Cosinus.	Sinus.	Cotang.	Tang.	Winkel.	

1. Tafel der trigonometrischen Linien.

Winkel.		Sinus.	Cosinus.	Tang.	Cotang.	Winkel.	
Gr.	Min.					Gr.	Min.
25	0	0,4226	0,9063	0,4663	2,1445	65	0
	10	0,4253	0,9051	0,4699	2,1283		50
	20	0,4279	0,9038	0,4734	2,1123		40
	30	0,4305	0,9026	0,4770	2,0965		30
	40	0,4331	0,9013	0,4806	2,0809		20
	50	0,4358	0,9001	0,4841	2,0655		10
26		26	13	36	152	64	
	0	0,4384	0,8988	0,4877	2,0503		0
	10	0,4410	0,8975	0,4913	2,0353		50
	20	0,4436	0,8962	0,4950	2,0204		40
	30	0,4462	0,8949	0,4986	2,0057		30
	40	0,4488	0,8936	0,5022	1,9912		20
27		26	13	36	142	63	
	0	0,4540	0,8910	0,5095	1,9826		0
	10	0,4566	0,8897	0,5132	1,9686		50
	20	0,4592	0,8884	0,5169	1,9547		40
	30	0,4617	0,8870	0,5206	1,9410		30
	40	0,4643	0,8857	0,5243	1,9274		20
28		26	14	37	133	62	
	0	0,4669	0,8843	0,5280	1,9140		10
	10	0,4695	0,8829	0,5317	1,8807		0
	20	0,4720	0,8816	0,5354	1,8676		50
	30	0,4746	0,8802	0,5392	1,8546		40
	40	0,4772	0,8788	0,5430	1,8418		30
29		25	14	38	125	61	
	0	0,4797	0,8774	0,5467	1,8291		20
	10	0,4823	0,8760	0,5505	1,8165		10
	20	0,4848	0,8746	0,5543	1,8040		0
	30	0,4874	0,8732	0,5581	1,7917		50
	40	0,4899	0,8718	0,5619	1,7796		40
30		25	15	39	116	60	
	0	0,4924	0,8704	0,5658	1,7675		30
	10	0,4950	0,8689	0,5696	1,7556		20
	20	0,4975	0,8675	0,5735	1,7437		10
	30	0,5000	0,8660	0,5774	1,7321		0
	40						
Gr.	Min.					Gr.	Min.
Winkel.		Cosinus.	Sinus.	Cotang.	Tang.	Winkel.	

1. Tafel der trigonometrischen Linien.

Winkel.		Sinus.	Cosinus.	Tang.	Cotang.	Winkel.	
Gr.	Min.					Gr.	Min.
30	0	0,5000	0,8660	0,5774	1,7321	60	0
	10	0,5025	0,8646	0,5812	1,7205		50
	20	0,5050	0,8631	0,5851	1,7090		40
	30	0,5075	0,8616	0,5890	1,6977		30
	40	0,5100	0,8601	0,5930	1,6864		20
	50	0,5125	0,8587	0,5969	1,6753		10
31	25		15	III	110	59	0
	0	0,5150	0,8572	0,6009	1,6643		50
	10	0,5175	0,8557	0,6048	1,6534		40
	20	0,5200	0,8542	0,6088	1,6426		30
	30	0,5225	0,8526	0,6128	1,6319		20
	40	0,5250	0,8511	0,6168	1,6212		10
32	50	0,5275	0,8496	0,6208	1,6107	58	0
	25		16	41	104		50
	0	0,5299	0,8480	0,6248	1,6008		40
	10	0,5324	0,8465	0,6289	1,5909		30
	20	0,5348	0,8450	0,6330	1,5798		20
	30	0,5373	0,8434	0,6371	1,5697		10
33	40	0,5398	0,8418	0,6412	1,5597	57	0
	50	0,5422	0,8403	0,6453	1,5497		50
	24		16	41	98		40
	0	0,5446	0,8387	0,6494	1,5399		30
	10	0,5471	0,8371	0,6536	1,5301		20
	20	0,5495	0,8355	0,6577	1,5204		10
34	30	0,5519	0,8339	0,6619	1,5108	56	0
	40	0,5544	0,8323	0,6661	1,5013		50
	50	0,5568	0,8307	0,6703	1,4919		40
	24		17	42	93		30
	0	0,5592	0,8290	0,6745	1,4826		20
	10	0,5616	0,8274	0,6787	1,4733		10
35	20	0,5640	0,8258	0,6830	1,4641	55	0
	30	0,5664	0,8241	0,6873	1,4550		50
	40	0,5688	0,8225	0,6916	1,4460		40
	50	0,5712	0,8208	0,6959	1,4370		30
	24		17	43	89		20
	0	0,5736	0,8192	0,7002	1,4281		10
Gr.	Min.					Gr.	Min.
Winkel.		Cosinus.	Sinus.	Cotang.	Tang.	Winkel.	

1. Tafel der trigonometrischen Linien.

Winkel.		Sinus.	Cosinus.	Tang.	Cotang.	Winkel.	
Gr.	Min.					Gr.	Min.
35	0	0,5736	0,8192	0,7002	1,4281	55	0
	10	0,5760	0,8175	0,7046	1,4193		50
	20	0,5783	0,8158	0,7089	1,4106		40
	30	0,5807	0,8141	0,7133	1,4019		30
	40	0,5831	0,8124	0,7177	1,3934		20
	50	0,5854	0,8107	0,7221	1,3848		10
36		24	17	44	84	54	
	0	0,5878	0,8090	0,7265	1,3764		0
	10	0,5901	0,8073	0,7310	1,3680		50
	20	0,5925	0,8056	0,7355	1,3597		40
	30	0,5948	0,8039	0,7400	1,3514		30
	40	0,5972	0,8021	0,7445	1,3432		20
37		50	0,5995	0,8004	0,7490	53	
	0	23	18	46	81		10
	10	0,6018	0,7986	0,7536	1,3270		0
	20	0,6041	0,7969	0,7581	1,3190		50
	30	0,6065	0,7951	0,7627	1,3111		40
	40	0,6088	0,7934	0,7673	1,3032		30
38		50	0,6111	0,7916	0,7720	52	
	0	23	0,6134	0,7898	0,7766		20
	10	0,6157	0,7880	0,7813	1,2876		10
	20	0,6180	0,7862	0,7860	77		0
	30	0,6202	0,7844	0,7907	1,2799		50
	40	0,6225	0,7826	0,7954	1,2723		40
39		50	0,6248	0,7808	0,8002	51	
	0	23	0,6271	0,7790	0,8050		30
	10	0,6293	0,7771	0,8098	1,2497		20
	20	0,6316	0,7753	0,8146	1,2423		10
	30	0,6338	0,7735	0,8195	74		0
	40	0,6361	0,7716	0,8243	1,2349		50
40		50	0,6383	0,7698	0,8292	50	
	0	22	0,6406	0,7679	0,8342		40
	10	0,6428	0,7660	0,8391	1,2131		30
	20		19	49	1,2059		20
	30			70	1,1988		10
	40				1,1918		0
Gr.	Min.					Gr.	Min.
Winkel.		Cosinus.	Sinus.	Cotang.	Tang.	Winkel.	

1. Tafel der trigonometrischen Linien.

Winkel.		Sinus.	Cosinus.	Tang.	Cotang.	Winkel.	
Gr.	Min.					Gr.	Min.
40	0	0,6428	0,7660	0,8391	1,1918	50	0
	10	0,6450	0,7642	0,8441	1,1847		50
	20	0,6472	0,7623	0,8491	1,1778		40
	30	0,6494	0,7604	0,8541	1,1708		30
	40	0,6517	0,7585	0,8591	1,1640		20
	50	0,6539	0,7566	0,8642	1,1571		10
	22		19	51	67		
41	0	0,6561	0,7547	0,8693	1,1504	49	0
	10	0,6583	0,7528	0,8744	1,1436		50
	20	0,6604	0,7509	0,8796	1,1369		40
	30	0,6626	0,7490	0,8847	1,1303		30
	40	0,6648	0,7470	0,8899	1,1237		20
	50	0,6670	0,7451	0,8952	1,1171		10
	21		20	52	65		
42	0	0,6691	0,7431	0,9004	1,1106	48	0
	10	0,6713	0,7412	0,9057	1,1041		50
	20	0,6734	0,7392	0,9110	1,0977		40
	30	0,6756	0,7373	0,9163	1,0913		30
	40	0,6777	0,7353	0,9217	1,0850		20
	50	0,6799	0,7333	0,9271	1,0786		10
	21		20	54	62		
43	0	0,6820	0,7314	0,9325	1,0724	47	0
	10	0,6841	0,7294	0,9380	1,0661		50
	20	0,6862	0,7274	0,9435	1,0599		40
	30	0,6884	0,7254	0,9490	1,0538		30
	40	0,6905	0,7234	0,9545	1,0477		20
	50	0,6926	0,7214	0,9601	1,0416		10
	21		21	56	61		
44	0	0,6947	0,7193	0,9657	1,0355	46	0
	10	0,6967	0,7173	0,9713	1,0295		50
	20	0,6988	0,7153	0,9770	1,0235		40
	30	0,7009	0,7133	0,9827	1,0176		30
	40	0,7030	0,7112	0,9884	1,0117		20
	50	0,7050	0,7092	0,9942	1,0058		10
	21		21	58	58		
45	0	0,7071	0,7071	1,0000	1,0000	45	0
Gr.	Min.					Gr.	Min.
Winkel.		Cosinus.	Sinus.	Cotang.	Tang.	Winkel.	

2. Tafel der Logarithmen trigonometrischer Linien.

Winkel.		Sinus.	Cosinus.	Tang.	Cotang.	Winkel.	
Gr.	Min.					Gr.	Min.
0	0	— ∞	10,00000	— ∞	+ ∞	90	0
	10	7,46373	10,00000	7,46373	12,53627		50
	20	7,76475	9,99999	7,76476	12,23524		40
	30	7,94084	9,99998	7,94086	12,05914		30
	40	8,06578	9,99997	8,06581	11,93419		20
	50	8,16268	9,99995	8,16273	11,83727		10
1		7918	2	7919	7919	89	
	0	8,24186	9,99993	8,24192	11,75808		0
	10	8,30879	9,99991	8,30888	11,69112		50
	20	8,36678	9,99988	8,36689	11,63311		40
	30	8,41792	9,99985	8,41807	11,58193		30
	40	8,46366	9,99982	8,46385	11,53615		20
2	50	8,50504	9,99978	8,50527	11,49473	88	10
		3778	4	3781	3781		
	0	8,54282	9,99974	8,54308	11,45692		0
	10	8,57757	9,99969	8,57788	11,42212		50
	20	8,60973	9,99964	8,61009	11,38991		40
	30	8,63968	9,99959	8,64009	11,35991		30
3	40	8,66769	9,99953	8,66816	11,33184	87	20
	50	8,69400	9,99947	8,69453	11,30547		10
		2480	7	2487	2487		
	0	8,71880	9,99940	8,71940	11,28060		0
	10	8,74226	9,99934	8,74292	11,25708		50
	20	8,76451	9,99926	8,76525	11,23475		40
4	30	8,78568	9,99919	8,78649	11,21351	86	30
	40	8,80585	9,99911	8,80674	11,19326		20
	50	8,82513	9,99903	8,82610	11,17390		10
		1845	9	1854	1854		
	0	8,84358	9,99894	8,84464	11,15536		0
	10	8,86128	9,99885	8,86243	11,13757		50
5	20	8,87829	9,99876	8,87953	11,12047	85	40
	30	8,89464	9,99866	8,89598	11,10402		30
	40	8,91040	9,99856	8,91185	11,08815		20
	50	8,92561	9,99845	8,92716	11,07284		10
		1469	11	1479	1479		
	0	8,94030	9,99834	8,94195	11,05805		0
Gr.	Min.					Gr.	Min.
Winkel.		Cosinus.	Sinus.	Cotang.	Tang.	Winkel.	

2. Tafel der Logarithmen trigonometrischer Linien.

Winkel.		Sinus.	Cosinus.	Tang.	Cotang.	Winkel.	
Gr.	Min.					Gr.	Min.
5	0	8,94030	9,99834	8,94195	11,05805	85	0
	10	8,95450	9,99823	8,95627	11,04373		50
	20	8,96825	9,99812	8,97013	11,02987		40
	30	8,98157	9,99800	8,98358	11,01642		30
	40	8,99450	9,99787	8,99662	11,00338		20
	50	9,00704	9,99775	9,00930	10,99070		10
6		1219	14	1232	1232	84	
	0	9,01923	9,99761	9,02162	10,97838		0
	10	9,03109	9,99748	9,03361	10,96639		50
	20	9,04262	9,99734	9,04528	10,95472		40
	30	9,05386	9,99720	9,05666	10,94334		30
	40	9,06481	9,99705	9,06775	10,93225		20
7		9,07548	9,99690	9,07858	10,92142	83	
		1041	15	1056	1056		
	0	9,08589	9,99675	9,08914	10,91086		0
	10	9,09606	9,99659	9,09947	10,90053		50
	20	9,10599	9,99643	9,10956	10,89044		40
	30	9,11570	9,99627	9,11943	10,88057		30
8		9,12519	9,99610	9,12909	10,87091	82	
		9,13447	9,99593	9,13854	10,86146		
		909	18	926	926		
	0	9,14356	9,99575	9,14780	10,85220		0
	10	9,15245	9,99557	9,15688	10,84313		50
	20	9,16116	9,99539	9,16577	10,83423		40
9		9,16970	9,99520	9,17450	10,82550	81	
		9,17807	9,99501	9,18306	10,81694		
		9,18628	9,99482	9,19146	10,80854		
		805	20	825	825		
	0	9,19433	9,99462	9,19971	10,80029		0
	10	9,20223	9,99442	9,20782	10,79218		50
10		9,20999	9,99421	9,21578	10,78422	80	
		9,21761	9,99400	9,22361	10,77639		
		9,22509	9,99379	9,23130	10,76870		
		9,23244	9,99357	9,23887	10,76113		
		723	22	745	745		
	0	9,23967	9,99335	9,24632	10,75368		0
Gr.	Min.					Gr.	Min.
Winkel.		Cosinus.	Sinus.	Cotang.	Tang.	Winkel.	

2. Tafel der Logarithmen trigonometrischer Linien.

Winkel.		Sinus.	Cosinus.	Tang.	Cotang.	Winkel.	
Gr.	Min.					Gr.	Min.
10	0	9,23967	9,99335	9,24632	10,75368	80	0
	10	9,24677	9,99313	9,25365	10,74635		50
	20	9,25376	9,99290	9,26086	10,73914		40
	30	9,26063	9,99267	9,26797	10,73203		30
	40	9,26739	9,99243	9,27496	10,72504		20
	50	9,27405	9,99219	9,28186	10,71814		10
11		655	24	679	679	79	
	0	9,28060	9,99195	9,28865	10,71135		0
	10	9,28705	9,99170	9,29535	10,70465		50
	20	9,29340	9,99145	9,30195	10,69805		40
	30	9,29966	9,99119	9,30846	10,69154		30
	40	9,30582	9,99093	9,31489	10,68511		20
12	50	9,31189	9,99067	9,32122	10,67878	78	10
		599	27	625	625		
	0	9,31788	9,99040	9,32747	10,67253		0
	10	9,32378	9,99013	9,33365	10,66635		50
	20	9,32960	9,98986	9,33974	10,66026		40
	30	9,33534	9,98958	9,34576	10,65424		30
13	40	9,34100	9,98930	9,35170	10,64830	77	20
	50	9,34658	9,98901	9,35757	10,64243		10
		551	29	579	579		
	0	9,35209	9,98872	9,36336	10,63664		0
	10	9,35752	9,98843	9,36909	10,63091		50
	20	9,36289	9,98813	9,37476	10,62524		40
14	30	9,36819	9,98783	9,38035	10,61965	76	30
	40	9,37341	9,98753	9,38589	10,61411		20
	50	9,37858	9,98722	9,39136	10,60864		10
		510	32	541	541		
	0	9,38368	9,98690	9,39677	10,60323		0
	10	9,38871	9,98659	9,40212	10,59788		50
15	20	9,39369	9,98627	9,40742	10,59258	75	40
	30	9,39860	9,98594	9,41266	10,58734		30
	40	9,40346	9,98561	9,41784	10,58216		20
	50	9,40825	9,98528	9,42297	10,57703		10
		475	34	508	508		
	0	9,41300	9,98494	9,42805	10,57195		0
Gr.	Min.					Gr.	Min.
Winkel.		Cosinus.	Sinus.	Cotang.	Tang.	Winkel.	

3. Tafel der Logarithmen trigonometrischer Linien.

Gr.	1					Gr.	Min.
15						75	0
							50
							40
							30
							20
							10
16						74	0
							50
							40
							30
							20
							10
17						73	0
							50
							40
							30
							20
							10
18						72	0
							50
							40
							30
							20
							10
19						71	0
							50
							40
							30
							20
							10
20						70	0
Gr.	1					Gr.	Min.
Winkel.		Costans.	Sinus.	Cotang.	Tang.	Winkel.	

2. Tafel der Logarithmen trigonometrischer Linien.

Winkel.		Sinus.	Cosinus.	Tang.	Cótang.	Winkel.	
Gr.	Min.					Gr.	Min.
20	0	9,53405	9,97299	9,56107	10,43893	70	0
	10	9,53751	9,97252	9,56498	10,43502		50
	20	9,54093	9,97206	9,56887	10,43113		40
	30	9,54433	9,97159	9,57274	10,42726		30
	40	9,54769	9,97111	9,57658	10,42342		20
	50	9,55102	9,97063	9,58039	10,41961		10
21		331	48	379	379	69	
	0	9,55433	9,97015	9,58418	10,41582		0
	10	9,55761	9,96966	9,58794	10,41206		50
	20	9,56085	9,96917	9,59168	10,40832		40
	30	9,56408	9,96868	9,59540	10,40460		30
	40	9,56727	9,96818	9,59909	10,40091		20
22	50	9,57044	9,96767	9,60276	10,39724	68	10
		314	50	365	365		
	0	9,57358	9,96717	9,60641	10,39359		0
	10	9,57669	9,96665	9,61004	10,38996		50
	20	9,57978	9,96614	9,61364	10,38636		40
	30	9,58284	9,96562	9,61722	10,38278		30
23	40	9,58588	9,96509	9,62079	10,37921	67	20
	50	9,58889	9,96456	9,62433	10,37567		10
		299	53	352	352		
	0	9,59188	9,96403	9,62785	10,37215		0
	10	9,59484	9,96349	9,63135	10,36865		50
	20	9,59778	9,96294	9,63484	10,36516		40
24	30	9,60070	9,96240	9,63830	10,36170	66	30
	40	9,60359	9,96185	9,64175	10,35825		20
	50	9,60646	9,96129	9,64517	10,35483		10
		285	56	341	341		
	0	9,60931	9,96073	9,64858	10,35142		0
	10	9,61214	9,96017	9,65197	10,34803		50
25	20	9,61494	9,95960	9,65535	10,34465	65	40
	30	9,61773	9,95902	9,65870	10,34130		30
	40	9,62049	9,95845	9,66204	10,33796		20
	50	9,62323	9,95786	9,66537	10,33463		10
		272	58	330	330		
	0	9,62595	9,95728	9,66867	10,33133		0
Gr.	Min.					Gr.	Min.
Winkel.		Cosinus.	Sinus.	Cotang.	Tang.	Winkel.	

2. Tafel der Logarithmen trigonometrischer Linien.

Winkel.		Sinus.	Cosinus.	Tang.	Cotang.	Winkel.	
Gr.	Min.					Gr.	Min.
25	0	9,62595	9,95728	9,66867	10,33133	65	0
	10	9,62865	9,95668	9,67196	10,32804		50
	20	9,63133	9,95609	9,67524	10,32476		40
	30	9,63398	9,95549	9,67850	10,32150		30
	40	9,63662	9,95488	9,68174	10,31826		20
	50	9,63924	9,95427	9,68497	10,31503		10
26		260	61	321	321	64	
	0	9,64184	9,95366	9,68818	10,31182		0
	10	9,64442	9,95304	9,69138	10,30862		50
	20	9,64698	9,95242	9,69457	10,30543		40
	30	9,64953	9,95179	9,69774	10,30226		30
	40	9,65205	9,95116	9,70089	10,29911		20
27	50	9,65456	9,95052	9,70404	10,29596	63	10
		249	64	313	313		
	0	9,65705	9,94988	9,70717	10,29283		0
	10	9,65952	9,94923	9,71028	10,28972		50
	20	9,66197	9,94858	9,71339	10,28661		40
	30	9,66441	9,94793	9,71648	10,28352		30
28	40	9,66682	9,94727	9,71955	10,28045	62	20
	50	9,66923	9,94660	9,72262	10,27738		10
		238	67	305	305		
	0	9,67161	9,94593	9,72567	10,27433		0
	10	9,67398	9,94526	9,72872	10,27128		50
	20	9,67633	9,94458	9,73175	10,26825		40
29	30	9,67866	9,94390	9,73476	10,26524	61	30
	40	9,68098	9,94321	9,73777	10,26223		20
	50	9,68328	9,94252	9,74077	10,25923		10
		229	70	298	298		
	0	9,68557	9,94182	9,74375	10,25625		0
	10	9,68784	9,94112	9,74673	10,25327		50
30	20	9,69010	9,94041	9,74969	10,25031	60	40
	30	9,69234	9,93970	9,75264	10,24736		30
	40	9,69456	9,93898	9,75558	10,24442		20
	50	9,69677	9,93826	9,75852	10,24148		10
		220	73	292	292		
	0	9,69897	9,93753	9,76144	10,23856		0
Gr.	Min.					Gr.	Min.
Winkel.		Cosinus.	Sinus.	Cotang.	Tang.	Winkel.	

2. Tafel der Logarithmen trigonometrischer Linien.

Winkel.		Sinus.	Cosinus.	Tang.	Cotang.	Winkel.	
Gr.	Min.					Gr.	Min.
30	0	9,69897	9,93753	9,76144	10,23856	60	0
	10	9,70115	9,93680	9,76435	10,23565		50
	20	9,70332	9,93606	9,76726	10,23275		40
	30	9,70547	9,93532	9,77015	10,22985		30
	40	9,70761	9,93457	9,77303	10,22697		20
	50	9,70973	9,93382	9,77591	10,22409		10
31		211	75	286	286	59	
	0	9,71184	9,93307	9,77877	10,22123		0
	10	9,71393	9,93230	9,78163	10,21837		50
	20	9,71602	9,93154	9,78448	10,21552		40
	30	9,71809	9,93077	9,78732	10,21268		30
	40	9,72014	9,92999	9,79015	10,20985		20
32	50	9,72218	9,92921	9,79297	10,20703	58	10
		203	79	282	282		
	0	9,72421	9,92842	9,79579	10,20421		0
	10	9,72622	9,92763	9,79860	10,20140		50
	20	9,72823	9,92683	9,80140	10,19860		40
	30	9,73022	9,92603	9,80419	10,19581		30
33	40	9,73219	9,92522	9,80697	10,19303	57	20
	50	9,73416	9,92441	9,80975	10,19025		10
		195	82	277	277		
	0	9,73611	9,92359	9,81252	10,18748		0
	10	9,73805	9,92277	9,81528	10,18472		50
	20	9,73997	9,92194	9,81803	10,18197		40
34	30	9,74189	9,92111	9,82078	10,17922	56	30
	40	9,74379	9,92027	9,82352	10,17648		20
	50	9,74568	9,91942	9,82626	10,17374		10
		188	85	273	273		
	0	9,74756	9,91857	9,82899	10,17101		0
	10	9,74943	9,91772	9,83171	10,16829		50
35	20	9,75128	9,91686	9,83442	10,16558	55	40
	30	9,75313	9,91599	9,83713	10,16287		30
	40	9,75496	9,91512	9,83984	10,16016		20
	50	9,75678	9,91425	9,84254	10,15756		10
		181	89	269	269		
	0	9,75859	9,91336	9,84523	10,15477		0
Gr.	Min.					Gr.	Min.
Winkel.		Cosinus.	Sinus.	Cotang.	Tang.	Winkel.	

2) Tafel der Logarithmen trigonometrischer Linien.

Winkel.		Sinus.	Cosinus.	Tang.	Cotang.	Winkel.	
Gr.	Min.					Gr.	Min.
35	0	9,75859	9,91336	9,84523	10,15477	55	0
	10	9,76039	9,91248	9,84791	10,15209		50
	20	9,76218	9,91158	9,85059	10,14941		40
	30	9,76395	9,91069	9,85327	10,14673		30
	40	9,76572	9,90978	9,85594	10,14406		20
	50	9,76747	9,90887	9,85860	10,14140		10
36		175	91	266	266	54	
	0	9,76922	9,90796	9,86126	10,13874		0
	10	9,77095	9,90704	9,86392	10,13608		50
	20	9,77268	9,90611	9,86656	10,13344		40
	30	9,77439	9,90518	9,86921	10,13079		30
	40	9,77609	9,90424	9,87185	10,12815		20
37	50	9,77778	9,90330	9,87448	10,12552	53	10
		168	95	263	263		
	0	9,77946	9,90235	9,87711	10,12289		0
	10	9,78113	9,90139	9,87974	10,12026		50
	20	9,78280	9,90043	9,88236	10,11764		40
	30	9,78445	9,89947	9,88498	10,11502		30
38	40	9,78609	9,89849	9,88759	10,11241	52	20
	50	9,78772	9,89752	9,89020	10,10980		10
		162	99	261	261		
	0	9,78934	9,89653	9,89281	10,10719		0
	10	9,79095	9,89554	9,89541	10,10459		50
	20	9,79256	9,89455	9,89801	10,10199		40
39	30	9,79415	9,89354	9,90061	10,09939	51	30
	40	9,79573	9,89254	9,90320	10,09680		20
	50	9,79731	9,89152	9,90578	10,09422		10
		156	102	259	259		
	0	9,79887	9,89050	9,90837	10,09163		0
	10	9,80043	9,88948	9,91095	10,08905		50
40	20	9,80197	9,88844	9,91353	10,08647	50	40
	30	9,80351	9,88741	9,91610	10,08390		30
	40	9,80504	9,88636	9,91868	10,08132		20
	50	9,80656	9,88531	9,92125	10,07875		10
		151	106	256	256		
	0	9,80807	9,88425	9,92381	10,07619		0
Gr.	Min.					Gr.	Min.

Winkel.	Cosinus.	Sinus.	Cotang.	Tang.	Winkel.
---------	----------	--------	---------	-------	---------

Tafel der Logarithmen trigonometrischer Linien.

		Sinus.	Cosinus.	Tang.	Cotang.	Winkel	
						Gr.	Min.
41	50	9,80807	9,88425	9,92881	10,07819	50	0
		9,80957	9,88319	9,92638	10,07862		10
		9,81106	9,88212	9,92394	10,07106		40
		9,81254	9,88105	9,93150	10,06850		30
		9,81402	9,87996	9,93406	10,06594		20
		9,81549	9,87887	9,93661	10,06338		10
		145	109	253	253		
	0	9,81694	9,87778	9,93916	10,06084	49	0
	10	9,81839	9,87668	9,94171	10,05829		50
	20	9,81983	9,87557	9,94426	10,05574		40
	30	9,82126	9,87446	9,94681	10,05319		30
	40	9,82269	9,87334	9,94935	10,05065		20
	50	9,82410	9,87221	9,95190	10,04810		10
		141	114	254	254		
	0	9,82551	9,87107	9,95444	10,04556	48	0
	10	9,82692	9,86993	9,95698	10,04302		50
42	20	9,82830	9,86879	9,95952	10,04048		40
	30	9,82968	9,86763	9,96205	10,03795		30
	40	9,83106	9,86647	9,96459	10,03541		20
	50	9,83242	9,86530	9,96712	10,03288		10
		136	117	254	254		
	0	9,83378	9,86413	9,96966	10,03034	47	0
	10	9,83513	9,86295	9,97219	10,02781		50
	20	9,83648	9,86176	9,97472	10,02528		40
	30	9,83781	9,86056	9,97725	10,02275		30
	40	9,83914	9,85936	9,97978	10,02022		20
	50	9,84048	9,85815	9,98231	10,01769		10
		131	122	253	253		
	0	9,84177	9,85698	9,98484	10,01516	46	0
	10	9,84306	9,85571	9,98737	10,01263		50
	20	9,84437	9,85448	9,98989	10,01011		40
44	30	9,84566	9,85324	9,99242	10,00758		30
	40	9,84694	9,85200	9,99495	10,00505		20
	50	9,84822	9,85074	9,99747	10,00253		10
		127	125	253	253		
	0	9,84949	9,84949	10,00000	10,00000	45	0
	Gr.	Min.				Gr.	Min.
Winkel.		Cosinus.	Sinus.	Cotang.	Tang.	Winkel.	

1

2

3

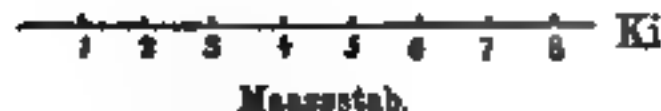
4

5

II. Abtheilung.

Mechanik.

Formeln und Lehrsätze.



1. Jede Kraft äussert sich durch einen Zug oder einen Druck, den sie auf einen Körper ausübt.

Dieser Druck kann durch Gewichte (Gramme etc.) gemessen werden.

Figur 1.



In Zeichnungen werden Kräfte durch Pfeile dargestellt und gemessen. Man macht sich eine Vorstellung, auf dem Pfeil ein Pfund, ein Kilo bedeutet.

Die Kraft P ist z. B. 4 Kilo.

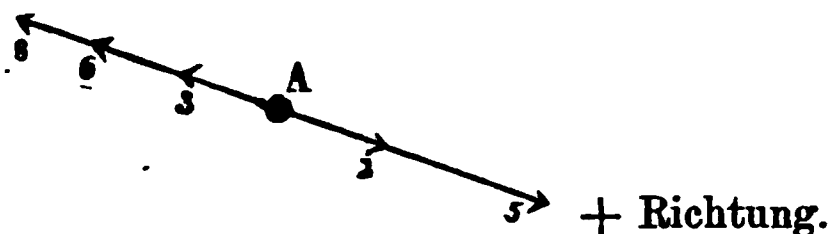
Der Punkt, in welchem ein Körper von einer Kraft ergriffen wird, heisst der Angriffspunkt der Kraft.

2. Der Angriffspunkt a einer Kraft P , liegt sich in der Richtung derselben beliebig verschieben.

nach a , a , u. s. w., ohne dass die Kraft selbst dadurch in ihrer Grösse verändert wird.

3. Wirken an einem Punkte A, Figur 2, mehrere Kräfte in einer Linie, und bezeichnet man alle nach einer

Figur 2.



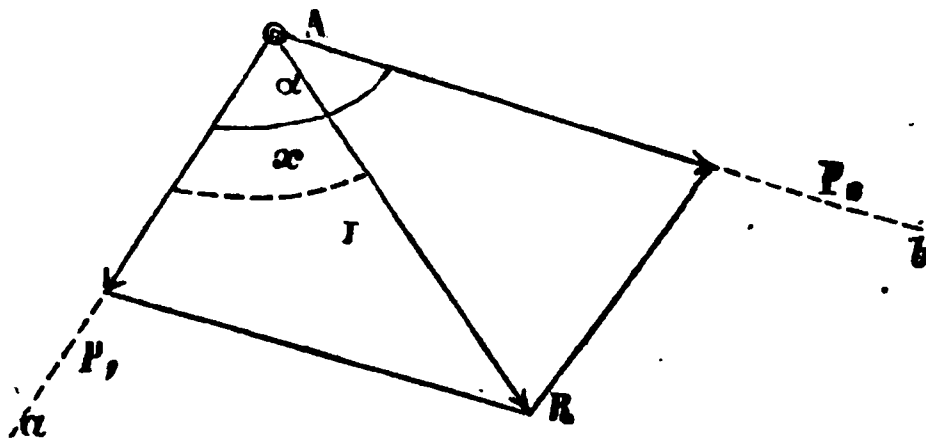
Richtung hin wirkenden Kräfte mit $+$ und alle nach der entgegengesetzten Richtung wirkenden mit $-$, so ist die aus diesen Kräften hervorgehende Mittelkraft (Resultante) gleich:

der algebraischen Summe aller Kräfte,
also in Figur 2:

$$R = +2 - 3 + 5 - 6 - 8 = -10,$$

d. h. R ist 10 Pfund oder Kilogramm etc. stark und hat eine Richtung nach dahin, wo das Minuszeichen steht.

Figur 3.



4. Wirken zwei Kräfte P_1 und P_2 , Figur 3, an einem Punkte A unter dem $\angle \alpha$, so findet man die Mittelkraft R ,

indem man die Kräfte P_1 und P_2 nach dem Maassstabe unter $\angle \alpha$ zusammenträgt, ein Parallelogramm bildet und die Diagonale $A R$ zieht. Diese Diagonale ist = der gesuchten Mittelkraft R nach Grösse und Richtung (Parallelogramm der Kräfte).

Um die Mittelkraft durch Rechnung zu finden, hat man die Gleichung:

$$R = \sqrt{P_1^2 + P_2^2 \pm 2 P_1 P_2 \cos. \alpha},$$

wobei das obere Zeichen giltig ist, wenn α stumpf, das untere dagegen wenn α spitz ist.

Die Lage von R bestimmt sich durch den $\angle x$ aus der Gleichung:

$$\sin. x = \frac{P_2 \sin. \alpha}{R}.$$

Bilden die Componenten P_1 und P_2 einen rechten Winkel, so ist $\alpha = 90^\circ$ und $\cos. \alpha = 1$, daher:

$$R = \sqrt{P_1^2 + P_2^2},$$

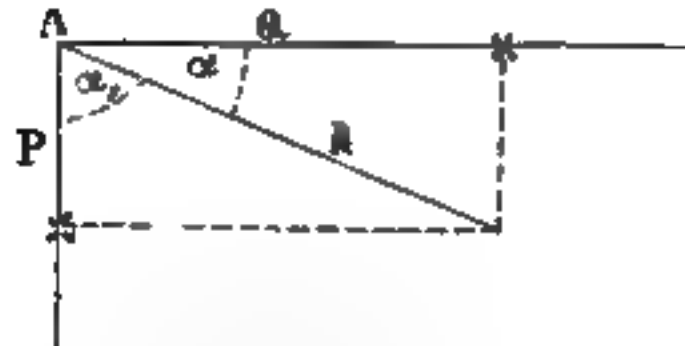
$$\sin. x = \frac{P_2}{R}.$$

5. Durch die umgekehrte Konstruktion und Rechnung lässt sich die Mittelkraft R in zwei Seitenkräfte (Componenten) zerlegen. Ist z. B. in Figur 3, R und P_1 gegeben und soll so zerlegt werden, dass die Seitenkraft P mit R den $\angle x$ bildet, so konstruirt man das $\triangle I$ aus zwei Seiten und dem eingeschlossenen $\angle x$, und ergänzt dann das ganze Parallelogramm. Die Seite $A P_2$ ist dann die gesuchte zweite Seitenkraft.

Ist ferner R und die beiden Richtungen $A a$ und $A b$, in die die Mittelkraft R zerfallen soll, gegeben, so ziehe man von Punkt R aus $\parallel A b$ und $\parallel A a$ die Linien $P_1 R$ und $P_2 R$. In dem hieraus entstehenden Parallelogramm sind die Abschnitte auf $A a$ und $A b$ die gesuchten Seitenkräfte.

3 Mittelkraft R , wie in Figur 4, in zwei recht-einander stehende Seitenkräfte P und Q so

Figur 4.



en, dass sie mit Q den $\angle \alpha$ bildet, so geschieht
 ist der vorhin angegebenen Konstruktionen.
 ung findet man:

$$Q = R \cos. \alpha,$$

$$P = R \sin. \alpha,$$

$$P = Q \tan. \alpha,$$

$$Q = P \cot. \alpha.$$

ken mehrere in einer Ebene liegenden Kräfte,
 f einen Punkt A , so findet man die daraus

Mittelkraft R durch die Konstruktion des
 r Kräfte auf folgende Weise.

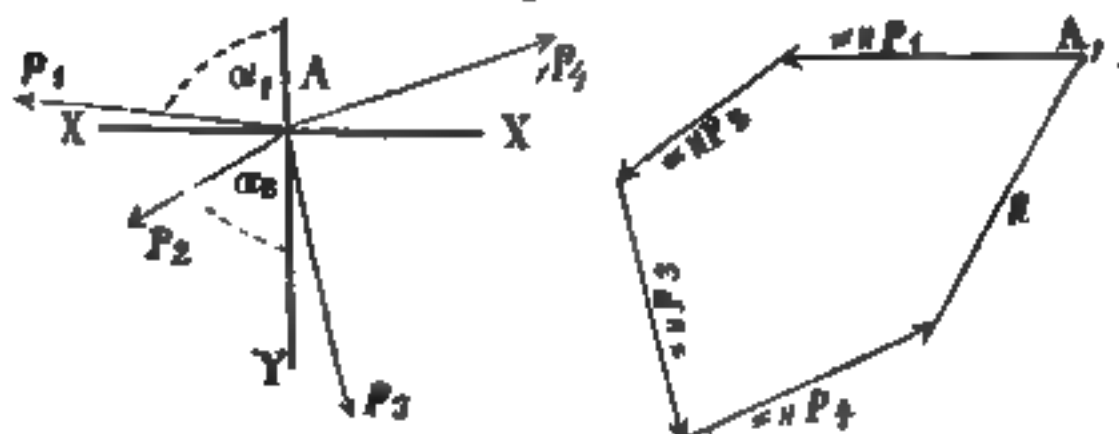
ehme einen willkürlichen Punkt A_1 an und
 olygon, an welchem man die Seiten immer —
 n Punkt A gegebenen Kräften P_1, P_2, P_3 u. s. w.
 schlusslinie dieses Polygons ist = der gesuchten
 R nach Grösse und Richtung und kann an
 ertragen werden. Durch Rechnung findet man
 oft, indem man eine jede der gegebenen Kräfte
 twinkelige Komponenten nach x und y , Figur 5,
 l die Kräfte P_1, P_2, P_3 u. s. w. zunächst auf
 inkelige Komponenten P und Q reducirt. Man

hat alsdann, wenn $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ die Neigungs \angle der Kräfte gegen yy bezeichnet:

$$P = P_1 \sin. \alpha_1 + P_2 \sin. \alpha_2 + \dots,$$

$$Q = P_1 \cos. \alpha_1 + P_2 \sin. \alpha_2 + \dots$$

Figur 5.



und die gesuchte Mittelkraft nach Satz 4:

$$R = \sqrt{P^2 + Q^2},$$

und für die Richtung von R :

$$\sin. x = \frac{P}{R}.$$

7. Wenn beliebig viele in einer Ebene wirkende Kräfte P_1, P_2, P_3 u. s. w. einen Körper in beliebigen Punkten a_1, a_2 u. s. w. ergreifen, so ist stets das Moment der Mittelkraft R = der Summe der Momente jener Kräfte, also:

$$M R = M P_1 + M P_2 + \dots,$$

oder wenn man die Lothlinien, die von einem beliebigen Punkte d auf die Krafrichtungen gezogen werden (Hebelarme der Kräfte) mit l, l_1, l_2 u. s. w. bezeichnet:

$$R l = P_1 l_1 + P_2 l_2 + P_3 l_3 + \dots,$$

wobei man positiven und negativen Drehsinn durch $+$ und $-$ Zeichen zu unterscheiden hat.

—

a verschiedenen Kräften
im Gleichgewicht sein,
te = Null, also:

$$\bullet R 1 = 0$$

9. Soll der Körper, Figur 6, sich weder drehen noch eine Ortsbewegung machen können, so muss, wenn man alle Kräfte in vertikale und horizontale Componenten zerlegt, sein:

1. Summe aller Vertikalkräfte = Null.
2. Summe aller Horizontalkräfte = Null.
3. Summe aller Momente = Null

Alle Kräfte ist gleich der
menten, also (Figur 7):

$$s + \dots,$$

en der Kräfte mit + und

elkraft R paralleler Kräfte
eliebigen Punkte D ist:

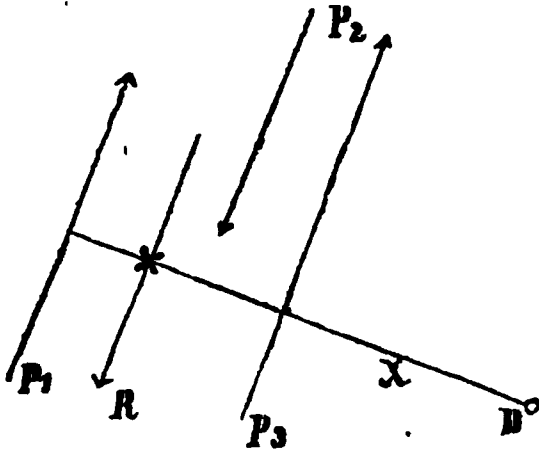
$$\frac{\text{nte der Kräfte}}{\text{Kräfte.}},$$

$$\frac{s + \dots}{s + \dots}.$$

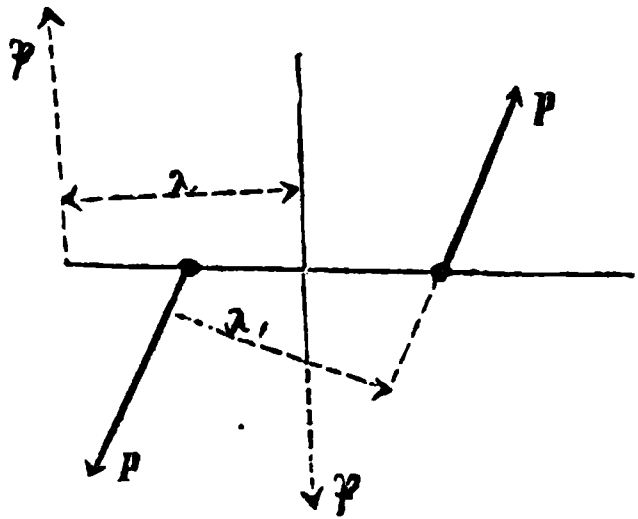
ale Gegenkräfte nennt man
ftepaar.

In diesem Falle existirt keine Mittelkraft. Zur Herstellung des Gleichgewichtes ist ein zweites Kräftepaar $\mathfrak{P} \mathfrak{P}$ erforderlich (Figur 8).

Figur 7.



Figur 8.

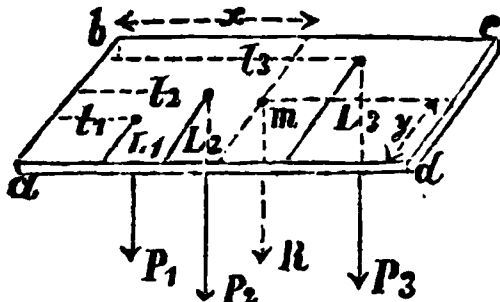


Bezeichnet man mit λ und λ_1 die Normalabstände der zu jedem Paare gehörigen Kräfte, so ist, wenn Gleichgewicht stattfinden soll:

$$\mathfrak{P} \lambda = \mathfrak{P} \lambda_1.$$

13. Wirken an einer gewichtlosen oder gleichmässig belasteten Platte, Figur 9, verschiedene Parallelkräfte P_1, P_2, P_3 alle nach einer Richtung hin, so ist der Abstand x der Mittelkraft von Kante a b :

Figur 9.



$$x = \frac{P_1 l_1 + P_2 l_2 + P_3 l_3 + \dots}{P_1 + P_2 + P_3 + \dots},$$

worin l_1, l_2, l_3 u. s. w. die Hebelarme der Kräfte in Bezug auf $a b$ bezeichnet, und der Abstand y der Mittelkraft von Kante a d :

$$y = \frac{P_1 L_1 + P_2 L_2 + P_3 L_3 + \dots}{P_1 + P_2 + P_3 + \dots},$$

worin $L_1, L_2, L_3 \dots$ die Hebelarme der Kräfte in Bezug auf Kante $a d$ bezeichnet.

Durch eine Parallele im Abstände x von $a b$ und eine zweite im Abstände y von $a d$ ergibt sich im Durchschnittspunkte m der Angriffspunkt der Mittelkraft.

14. Ist G das Gewicht eines Körpers und $p_1, p_2, p_3 \dots$ das Gewicht seiner einzelnen Theile, so ist:

$$p_1 + p_2 + p_3 + \dots = G$$

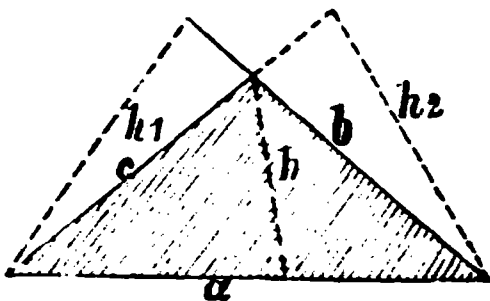
und G die Mittelkraft von p_1, p_2, p_3 . Den Angriffspunkt nennt man den Schwerpunkt des Körpers.

15. Der Schwerpunkt einer geometrischen Fläche ist identisch mit dem Schwerpunkte einer unendlich dünnen Platte.

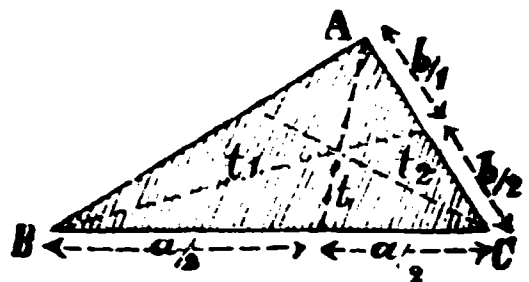
16. Jede Fläche oder jeder Körper, der im Schwerpunkte unterstützt ist, befindet sich im Gleichgewichtszustande.

Der Schwerpunkt, d. h. der Angriffspunkt der Mittelkraft G wird theoretisch ermittelt durch Berechnung des Abstandes der Mittelkraft G von mehreren Kanten nach Satz 13.

Figur 10.



Figur 11.



17. Der Schwerpunkt symetrischer Flächen und Körper, Kreis, Ellipse, reguläres Polypon, Kegel, Würfel etc. liegt im Mittelpunkte.

18. Der Abstand des Schwerpunktes eines \triangle , Figur 10, ist:

von Seite $a = \frac{1}{3} h$,

„ „ $b = \frac{1}{3} h_1$,

„ „ $c = \frac{1}{3} h_2$.

Auch liegt, Figur 11, der Schwerpunkt im Durchschnittspunkte der die Seiten halbirenden Transversalen t, t_1, t_2 . Sein Abstand ist:

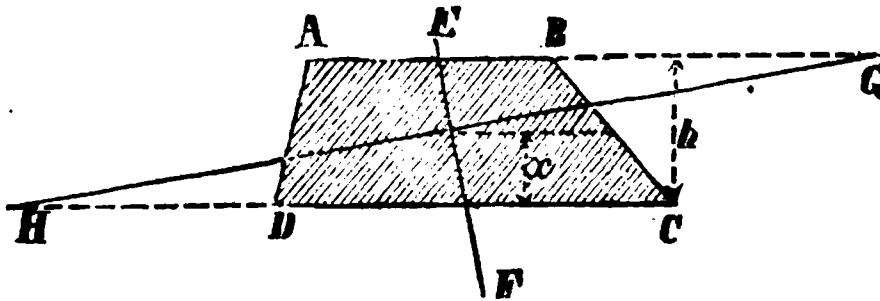
von Ecke $A = \frac{1}{3} t$,

„ „ $B = \frac{1}{3} t_1$,

„ „ $C = \frac{1}{3} t_2$,

19. Der Schwerpunkt s eines Trapezes wird durch folgende Konstruktion gefunden. Man halbire AB und

Figur 12.



DC und ziehe EF . Mache $BG = DC$ und $HD = AB$ und ziehe GH . Der Durchschnitt mit EF ist der Schwerpunkt. Sein Abstand von DC ist:

$$x = \frac{DC + 2AB}{AB + DC} \cdot \frac{h}{3}.$$

20. Den Schwerpunkt eines Viereckes findet man durch Konstruktion, indem man dasselbe in zwei \triangle zerlegt ACB und CDA , deren Schwerpunkte S_1 und S_2 aufsucht, die Linie S_1S_2 zieht, sodann das Viereck nochmals in zwei \triangle zerlegt BCD und ABD und deren Schwerpunkte S_3 und S_4 aufsucht und die Linie S_3S_4 zieht. Der Durchschnitt beider Linien S_1S_2 und S_3S_4 ist der Schwerpunkt.

und $s . s$ ist der Schwernunkt. Durch Rechnung findet

nn
lea
let
en
af-
er-

eh
be
ch

ise
cht
..
ide
len
te-

$$x = \frac{f_1 l_1 + f_2 l_2 + \dots - f_n l_n + \dots}{F}$$

und von Kante Y Y:

$$y = \frac{f_1 L_1 + f_2 L_2 + \dots - f_n L_n + \dots}{F}$$

Der Durchschnittspunkt der mit x und y zu den Kanten gezogenen Parallele ist der Schwerpunkt des Polygons.

23. Ueber die Schwerpunktslage anderer Flächen und Körper vide die Tabellen.

24. Bezeichnet bei gleichförmig beschleunigter oder verzögerter Bewegung:

c die Anfangsgeschwindigkeit,

v die Endgeschwindigkeit,

s den Weg,

t die Zeit,

p die in der Sekunde eintretende Beschleunigung oder Verzögerung,

so ist:

$$s = \frac{\pm v^2 \mp c^2}{2p},$$

$$s = ct \pm \frac{p t^2}{2},$$

$$s = \frac{v + c}{2} t,$$

$$v = c \pm p t,$$

$$v = \sqrt{\pm 2ps + c^2}.$$

Die oberen Zeichen gelten für beschleunigte, die unteren für verzögerte Bewegung.

Beim freien Fall der Körper ist:

$$p = 9,8088 \text{ Meter,}$$

$$s = \text{der Fallhöhe } h.$$



Bezeichnet z den Abstand eines gewissen Punktes von der Axe, so ist:

$$g = \frac{z \pi n}{30} = u z.$$

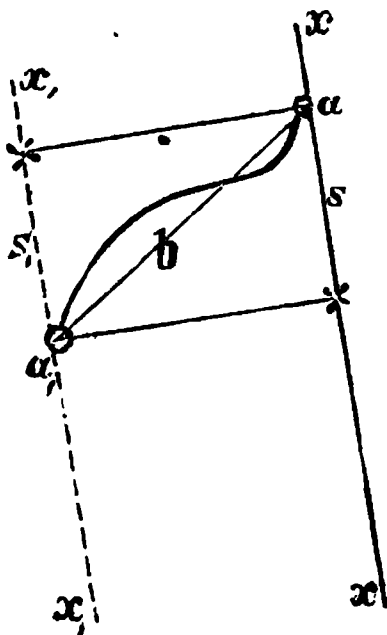
26. Die mechanische Arbeit L einer Kraft P ist das Produkt aus P und dem Wege s , den der Angriffspunkt der Kraft auf der Krafrichtung abgelaufen hat — also:

$$L = P s.$$

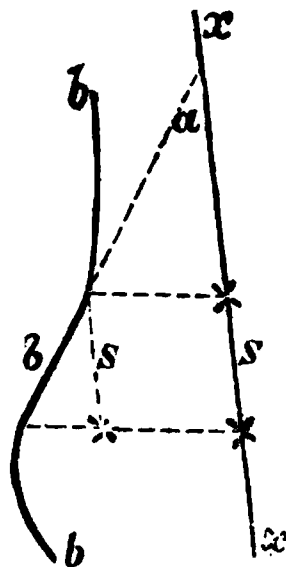
27. Der natürliche Weg des Angriffspunktes a einer Kraft P ist die Krafrichtung xx selbst.

Aus derselben kann er indessen durch Führungen oder andere Kräfte abgelenkt werden und eine gewisse Bahn b durchlaufen.

Figur 14.



Figur 15.



Hiebei findet stets eine parallele Verschiebung der Kraftlinie xx nach x, x , statt und es ist der Weg der Kraft P :

$$= s, = s = \text{Projektion von } b \text{ auf } xx.$$

nie und für ein kleines als
element σ , dessen Tangente
einschließt, ist der Weg der
 $\cos. \alpha$.

Abstandslinie w zwischen zwei
Punkten auf der Bahn b sei
effektive Weg des Angriffs-
genannt und sein Neigungs-
 α sei $= \alpha$, so ist der Weg
ist:

$$s = w \cos. \alpha$$

Arbeit mit der sich die Kraft
der Bewegung auf der Bahn-
 b theiligt hat:

$$L = P s = P w \cos. \alpha.$$

Ein Komplex von Kräften
 $P, P', P'',$ u. s. w., die sich das
sich durch eine unendlich
endlich kleinen Weg σ ver-

Die hierbei geleistete Ar-
beit ist:

$$L = F s = \text{Null}$$

Bei dieser kleinen Ver-
schiebung beschreiben aber
die Angriffspunkte der Kräfte
 $P, P', P'',$ u. s. w. die
effektiven Wege $\sigma, \sigma', \sigma'',$
u. s. w. Diese auf die Kraft-
linien projectirt, geben die
Wege der Kräfte:

$$s, s', s'', \text{ u. s. w. ;}$$

die bei der Verschiebung geleistete Arbeit ist daher auch:

$$L = \text{Null} = P, s, + P,, s,, + P,,, s,,, + \dots,$$

d. h.:

Bei einer kleinen willkürlichen Verschiebung eines im Gleichgewichtszustande befindlichen Kräftekomplexes ist die Arbeit aller Kräfte zusammen = Null.

31. Wenn eine Kraft P einem Körper die Beschleunigung $= p$ ertheilt, so ist:

$$\frac{P}{p} = M$$

diejenige Kraft, welche demselben Körper eine Beschleunigung:

$$= \text{Eins}$$

ertheilen würde.

Man hat diese Kraft M mit dem Namen:

„Masse“

bezeichnet und hat auch, wenn G das Gewicht des Körpers und $g = 9,8088$ Meter die Beschleunigung der Schwerkraft bedeutet:

$$M = \frac{G}{g}.$$

32. Ein mit einer gewissen Geschwindigkeit v_0 geradlinig sich bewegendes Körper besitzt ein gewisses Arbeitsvermögen.

Vermindert sich v_0 , so verliert er an Arbeitsvermögen, vergrößert sich v_0 , so gewinnt er daran.

Im ersten Falle gibt er Arbeit aus — er verrichtet Arbeit — im zweiten Falle nimmt er Arbeit auf — es wird an ihm Arbeit verrichtet.

Bedeutet c die Anfangsgeschwindigkeit, v die Endgeschwindigkeit, so ist diese Arbeitsaufnahme oder Arbeits-

ausgabe während der Geschwindigkeitsveränderung von c in v :

$$L = -\frac{M}{2} (v^2 - c^2).$$

Das Produkt:

$$\frac{M}{2} v^2$$

nennt man die lebendige Kraft des bewegten Körpers.

33. Bei einem mit der Winkelgeschwindigkeit w sich um eine Axe drehenden Körper legen die einzelnen Massentheile $m_1, m_2, m_3 \dots$ die Wege $w z_1, w z_2, w z_3 \dots$ zurück, wenn z_1, z_2, z_3 die Axenabstände von m_1, m_2, m_3 bezeichnet.

Die lebendige Kraft der einzelnen Massentheile ist daher:

$$\frac{m_1}{2} (w z_1)^2; \quad \frac{m_2}{2} (w z_2)^2$$

u. s. w. Durch Summation ergibt sich die lebendige Kraft des ganzen rotirenden Körpers:

$$L = \frac{w^2}{2} (m_1 z_1^2 + m_2 z_2^2 + m_3 z_3^2 + \dots).$$

Die Klammergrösse nennt man das Trägheitsmoment des rotirenden Körpers und bezeichnet es gewöhnlich mit T .

Für eine Stange $2a$ lang, drehend um eine durch den Schwerpunkt gehende Axe, ist:

$$T = \frac{1}{3} M a^2.$$

Für einen Kreis, um den Durchmesser $2r$ rotirend, ist:

$$T = \frac{1}{4} M r^2.$$

Für einen Kreis, der sich in seiner Ebene um den Mittelpunkt dreht, ist:

$$T = \frac{1}{2} M r^2.$$

Für eine Kugel, um den Durchmesser rotirend, ist:

$$T = \frac{2}{5} M r^2.$$

Für einen Cylinder:

$$T = \frac{1}{2} M r^2.$$

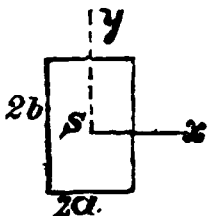
Für einen Kegel:

$$T = \frac{3}{10} M r^2.$$

Für einen abgekürzten Kegel:

$$T = \frac{3}{10} M \frac{R^5 - r^5}{R^3 - r^3}.$$

Figur 18.



Für ein Rechteck drehend:

um x; $T = \frac{1}{3} M b^2,$

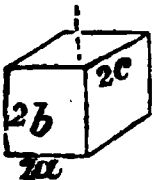
um y; $T = \frac{1}{3} M a^2,$

um s; $T = M \frac{a^2 + b^2}{3}.$

Für ein Parallelepipedon, drehend eine Schweraxe || zu den Kanten 2b:

Figur 19.

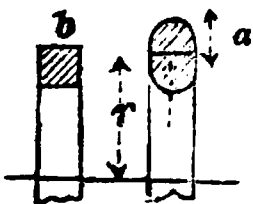
$$T = M \frac{a^2 + c^2}{3}.$$



Für einen Ring, drehend um eine zu seiner Ebene normale Axe, bei:

quadratischen Profil $T = M \left(r^2 + \frac{b^2}{4} \right),$

elliptischen „ $T = M \left(r^2 + \frac{3}{4} a^2 \right).$



Für einen Kugelabschnitt von der Höhe h, der sich um den Kugeldurchmesser 2r dreht:

$$T = \frac{2}{3} M h \left(r - \frac{5}{12} h + \frac{1}{90} \frac{h^2}{r - \frac{1}{3} h} \right).$$

34. Die Centrifugalkraft tritt auf, wenn ein Körper eine bogenförmige Bahn durchläuft. Sie äussert sich in dem Bestreben des Ersteren, sich von dem Mittelpunkt, aus dem die bogenförmige Bahn beschrieben ist, zu entfernen.

Bedeutet:

G das Gewicht des Körpers,
 g die Beschleunigung der Schwerkraft,
 M die Masse des Körpers,
 r den Krümmungshalbmesser der Bahn,
 v die Geschwindigkeit des Körpers,
 P die Centrifugalkraft,

so ist:

$$P = \frac{G}{g} \cdot \frac{v^2}{r} = M \frac{v^2}{2} = 0,102 \frac{v^2 G}{2}$$

Kilogramm.

35. Man unterscheidet beim Stosse:

- a. den centrischen Stoss,
- b. den excentrischen Stoss,
- c. den vollkommen unelastischen,
- d. den vollkommen elastischen,
- e. den unvollkommen elastischen Stoss.

Der excentrische Stoss lässt sich durch Kräftezerlegung auf den centrischen zurückführen. Letzterer findet statt, wenn die im Stosspunkte auf der gemeinschaftlichen Berührungsebene errichtete Normale parallel mit der Bewegungsrichtung der Schwerpunkte beider Körper ist und durch beide Schwerpunkte geht. Nach vollendetem Stosse ändern die Körper ihre bisherige Geschwindigkeit.

Beim Stosse vollkommen unelastischer Körper findet ausserdem ein Arbeitsverlust statt.

Bezeichnet:

M_1 und M_2 die Masse der Körper,
 V_1 und V_2 ihre gleichgerichteten Geschwindigkeiten vor dem Stosse,
 c_1 und c_2 dieselben nach dem Stosse,

so ist:

Beim vollkommen unelastischen Stosse:

$$c_1 = c_2 = \frac{M_1 V_1 + M_2 V_2}{M_1 + M_2}$$

und der Arbeitsverlust:

$$\frac{1}{2} \frac{M_1 M_2}{M_1 + M_2} \cdot (V_1 - V_2)^2.$$

Beim vollkommen elastischen Stosse:

$$c_1 = \frac{(M_1 - M_2) V_1 + 2 M_2 V_2}{M_1 + M_2},$$

$$c_2 = \frac{(M_2 - M_1) V_2 + 2 M_1 V_1}{M_1 + M_2},$$

Für $V_2 = 0$ ist hiernach:

$$c_1 = \frac{M_1 - M_2}{M_1 + M_2} \cdot V_1,$$

$$c_2 = \frac{2 M_1}{M_1 + M_2} \cdot V_1.$$

Für $M_1 = M_2$ ist:

$$c_1 = V_2,$$

$$c_2 = V_1.$$

Beim unvollkommen elastischen Stosse:

$$c_1 = \frac{M_1 V_1 + M_2 V_2 - M_2 (V_1 - V_2) \sqrt{\frac{h}{h_1}}}{M_1 + M_2},$$

$$c_2 = \frac{M_1 V_1 + M_2 V_2 + M_1 (V_1 - V_2) \sqrt{\frac{h}{h_1}}}{M_1 + M_2}.$$

Hierin ist h die Höhe, auf welche der Körper zurückprallen würde, wenn es aus der Höhe h herabfallen würde.

Für Elfenbein ist:

$$\left| \frac{h}{h_1} = \frac{1}{2} \right|$$

Für Stahl und Kork:

$$\left| \frac{h}{h_1} = \frac{1}{3} \right|$$

36. Die Reibung ist unabhängig von der Grösse der Berührungslächen — abhängig dagegen von der Rauheit derselben und dem Normaldrucke.

Unter Letzterem versteht man den Druck lothrecht zur Berührungsläche, durch den die reibenden Flächen an einander gepresst werden.

Um die Rauheit der Oberflächen zu mildern, wendet man Schmiermittel an.

Man unterscheidet:

1. die gleitende Reibung.
2. die Zapfenreibung.
3. die rollende Reibung.
4. die Seil- oder Kettenreibung.

37. Bedeutet f den Koeffizienten der gleitenden Reibung, N den Normaldruck und R die Betriebskraft zur Ueberwindung dieser Reibung, so ist:

$$R = f N.$$

Gleitet ein Körper auf einer um α Grad geneigten Bahn herab, so ist:

$$N = G \cos. \alpha,$$

wenn G das Gewicht des Körpers bedeutet und daher:

$$R = f G \cos. \alpha.$$

Bei einem gewissen Neigungswinkel der Bahn hält die Reibung der Körper auf derselben fest. Dieser Winkel heisst der Reibungs- oder Ruhewinkel. Bezeichnet man ihn mit ϱ , so ist:

$$\text{tang. } \varrho = f.$$

Für eine horizontale Bahn ist $\alpha = 0$, daher $\cos. \alpha = 1$ und:

$$R = f G.$$

Die nachfolgende Tabelle gibt die Werthe von f an.
Koëffizienten für die gleitende Reibung.

Reibende Körper.	Lage der Fasern.	Zustand der Oberflächen.	Reibungs- koëffizient f	
			der Ruhe.	der Be- wegung.
Gusseisen				
auf Gusseisen oder	parallel	wenig fettig	0,16	0,15
Bronze		mit Wasser	..	0,31
= auf Eiche		trocken	..	0,49
		trockene Seife	..	0,19
Schmiedeeisen				
auf Schmiedeeisen	..	trocken	..	0,44
= auf Gusseisen oder				
Bronze	parallel	trocken	0,19	0,18
= auf Eiche		mit Wasser	0,65	0,26
		mit Talg	0,11	0,08
Bronze auf Bronze	trocken	..	0,20
= auf Gusseisen	trocken	..	0,21
= auf Schmiedeeisen	..	etwas fettig	..	0,16
Messing auf Eiche . .	parallel	trocken	0,62	..
	gekreuzt	trocken	0,62	0,48
Eiche auf Eiche		trockene Seife	0,44	0,16
		trocken	0,54	0,34
		mit Wasser	0,71	0,25
Eichenhirnholz auf Eiche	parallel	trocken	0,43	0,19

38. Bedeutet N den Normaldruck eines horizontal liegenden Zapfens gegen seine Lagerschale, f den Koëffizienten der Zapfenreibung, r den Zapfenhalbmesser, so ist das Moment zur Ueberwindung der Zapfenreibung:

$$M p = f N r$$

und die hierzu nöthige Kraft p an einem Hebelarm $= r_1$ wirkend:

$$p = f N \frac{r}{r_1}.$$

Der Normaldruck N ist = die Mittelkraft aus sämtlichen auf den Zapfen wirkenden Kräften, p mit eingeschlossen.

Die nachfolgende Tabelle gibt die Werthe von f an.

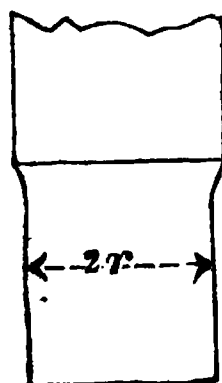
Koëffizienten für die Zapfenreibung.

Reibende Körper.	Zustand der Oberflächen.	Reibungskoeffizient, wenn die Schmiere erneuert wird:	
		auf gew. Art.	ununter- brochen.
Gusseisen auf Gusseisen	geschmiert	0,08	0,054
	fettig	0,14	..
= auf Bronze	geschmiert	0,08	0,054
	fettig	0,16	..
= auf Pockholz	geschmiert	..	0,09
	fettig	0,10	..
Schmiedeeisen auf Guss- eisen	geschmiert	0,08	0,054
= auf Bronze	geschmiert	0,08	0,054
	wenig fettig	0,25	..
= auf Pockholz	geschmiert	0,11	..
	fettig	0,19	..

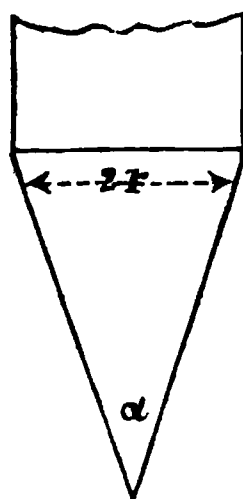
39. Die Spurzapfenreibung ist eine Art gleitender Reibung.

Bezeichnet M_p das zu ihrer Ueberwindung nöthige Kraftmoment, p die Kraft selbst und r_1 ihren Hebelarm, sowie G das Gewicht der stehenden Welle nebst Belastung, so hat man für die nachfolgenden Zapfenformen:

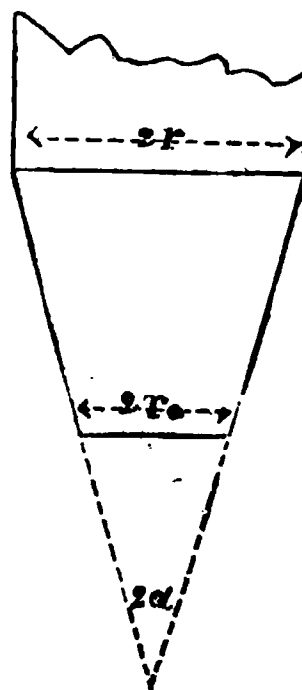
Figur 20.



Figur 21.



Figur 22.

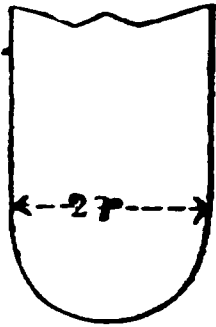


$$\left. \begin{aligned} M_p &= \frac{2}{3} r f G, \\ p &= \frac{2}{3} \frac{r}{r_1} f G. \end{aligned} \right\} \text{Figur 20.}$$

$$\left. \begin{aligned} M_p &= \frac{2}{3} \frac{G}{\sin. \frac{\alpha}{2}} \cdot f r, \\ p &= \frac{2}{3} \frac{G}{\sin. \frac{\alpha}{2}} \cdot f \frac{r}{r_1}. \end{aligned} \right\} \text{Figur 21.}$$

$$\left. \begin{aligned} M_p &= \frac{G f}{r^2} \left(\frac{r^3 - r r_0^2}{\sin. \alpha} + r_0^3 \right) \\ p &= \frac{G f}{r^2 r'} \left(\frac{r^3 - r r_0^2}{\sin. \alpha} + r_0^3 \right) \end{aligned} \right\} \text{Figur 22.}$$

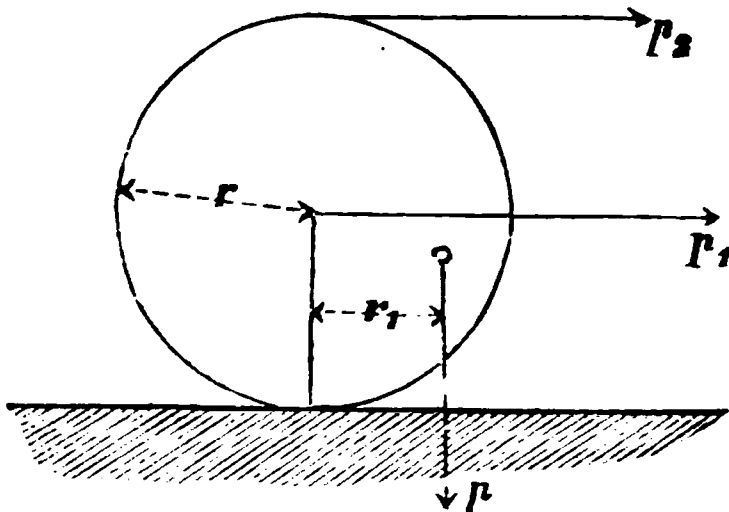
Figur 23.



$$\left. \begin{aligned} M_p &= f \frac{\pi}{2} G r, \\ p &= f \frac{\pi}{2} G \frac{r}{r_1} \end{aligned} \right\} \text{Figur 23.}$$

40. Bei der wälzenden oder rollenden Reibung greift die zur Ueberwindung nöthige Kraft, entweder in einem beliebigen Punkte wie p , oder sie greift wie p_1 im Mittelpunkte der rollenden Walze oder an deren Umfang, wie p_2 , an. Bezeichnet N den Normaldruck. f den Koeffizienten der rollenden Reibung, so ist:

Figur 24.



$$p = f \frac{N}{r},$$

$$p_1 = f \frac{N}{r},$$

$$p_2 = f \frac{N}{2r}.$$

Für Pockholz auf Eichen ist $f = 0,047$,
 „ Ulme auf Eichen ist $f = 0,081$,
 „ Gusseisen auf Gusseisen ist $f = 0,047$,
 „ Gusseisen auf Eisenschienen $f = 0,052$.

Für Fuhrwerke gilt die nachfolgende Tabelle.

Koeffizienten für die Reibungswiderstände der Bewegung für Fuhrwerke.

Das Verhältniss des horizontalen Zuges auf horizontaler Bahn zur Last beträgt ca.:

auf schlechten Wegen, in lockern Sande oder auf einer lockern 4—5 Zoll (100—130 Millim.) hohen Kiesschicht	$\frac{1}{10}$ bis $\frac{1}{5}$
auf kothiger, aufgerissener Chaussee	$\frac{1}{20}$ „ $\frac{1}{12}$
auf guter Chaussee	$\frac{1}{50}$ „ $\frac{1}{30}$
auf gewöhnlichem Pflaster	$\frac{1}{40}$ „ $\frac{1}{50}$
auf sehr gutem Pflaster	$\frac{1}{50}$ „ $\frac{1}{60}$
auf Eisenbahnen bei mässiger Fahrgeschwindigkeit ca.	$\frac{1}{200}$
bei grosser Fahrgeschwindigkeit ca.	$\frac{1}{100}$

Die vorstehenden Angaben setzen einen mittleren Rad-durchmesser von 4 Fuss (1,25 Meter) und eine Reifenbreite von 4—4 $\frac{1}{2}$ Zoll (100—120 Millim.) voraus.

Der Widerstand von Fuhrwerken ist nahezu dem Rad-durchmesser umgekehrt proportional.

Auf Wegen mit einer Steigung $\frac{1}{n}$ nimmt die Zugkraft um $\frac{1}{n}$ der Last zu oder ab.

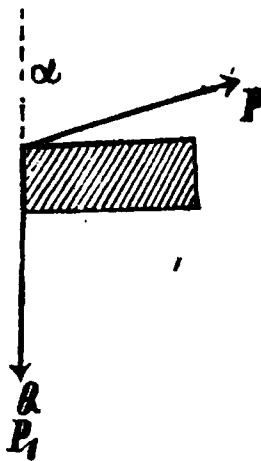
41. Die Seilreibung tritt auf, wenn ein Seil eine gewisse Last Q trägt und ganz oder theilweise um einen walzenförmigen Körper geschlungen ist.

Durch die Seilreibung wird die zum Heraufziehen der Last Q erforderliche Kraft vergrössert und andererseits die Kraft, mit der Q hinabgleitet, vermindert.

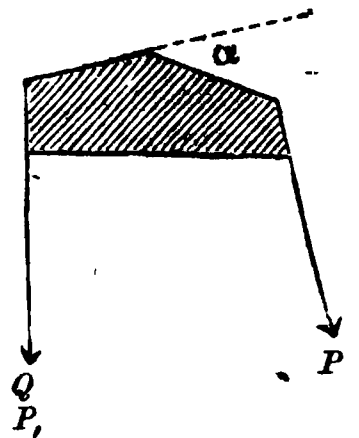
Bezeichnet f den Reibungskoeffizienten, P die Kraft zum Heraufziehen, P_1 die des Herabgleiten, so ist für die nachstehenden Fälle:

$$\left. \begin{aligned} P &= Q \left(1 + 2 f \sin. \frac{\alpha}{2} \right), \\ P_1 &= Q \left(1 - 2 f \sin. \frac{\alpha}{2} \right). \end{aligned} \right\} \text{Figur 25.}$$

Figur 25.



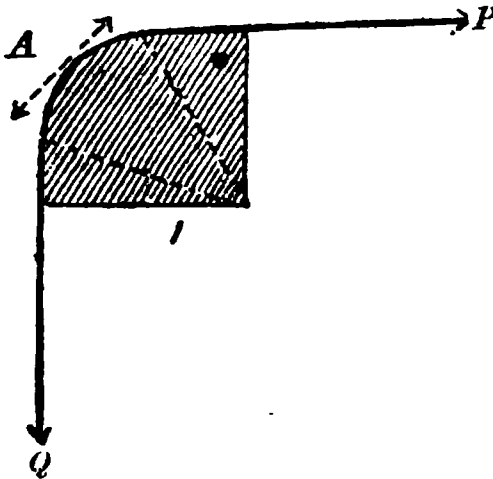
Figur 26.



Für ein Polygon mit dem Kantenwinkel α , wenn das Seil n Seiten desselben deckt:

$$\left. \begin{aligned} P &= \left(1 + 2 f \sin. \frac{\alpha}{2} \right)^n Q, \\ P_1 &= \left(1 - 2 f \sin. \frac{\alpha}{2} \right)^n Q. \end{aligned} \right\} \text{Figur 26.}$$

Figur 27.



Für eine Walze, die auf eine Bogenlänge $= A$ von dem Seile gedeckt ist:

$$P = 2,71828^f A Q,$$

$$Q = 2,71828 - f A P.$$

Für Hanfseile und Holzzylinder kann man $f = \frac{1}{8}$ annehmen und hat daher bei einer Deckung des Seiles von:

$\frac{1}{4}$ des Walzenumfanges . .	$P = 1,69 Q,$
$\frac{1}{2}$ „ „ „ . .	$P = 2,85 Q,$
Bei einem vollen Umschlag .	$P = 8,12 Q,$
„ zwei vollen Umschlägen .	$P = 65,94 Q,$
„ vier „ „ . .	$P = 4348,56 Q.$

Die vorigen Formeln gelten auch für Ketten, die aus Ringen konstruirt sind, und für Gliederketten, sofern man den Winkel α aus der Gliedlänge l und dem Walzenhalbmesser r bestimmt.

Es ist hier:

$$l = 2 r \sin. \frac{\alpha}{2}$$

und daher:

$$\sin. \frac{\alpha}{2} = \frac{l}{2 r}.$$

Daher wenn n die Anzahl der aufliegenden Kettenglieder bezeichnet:

$$P = \left(1 + \frac{fl}{r}\right)^n Q,$$

$$P_1 = \left(1 - \frac{fl}{r}\right)^n Q.$$

Figur 28.

43. Die Steifigkeit der Seile und Ketten äussert sich dadurch, dass sich am Lastende das Seil nicht flach auf die Rolle auflegt, sondern um ein Stück e davon absteht.

Hierdurch wird der Hebelarm der Last und daher ihr Moment vergrössert.

Die Kraft zur Ueberwindung der Seilsteifigkeit ist:

$$P = \frac{r+e}{r} Q.$$

r ein Seil vom Durchmesser d ist:

$$e = \frac{d^2}{2}.$$

r eine sich zugleich auf- und abwickelnde Kette ist:

$$e = f \delta.$$

r eine sich blos abwickelnde Kette:

$$e = f \frac{\delta}{2},$$

δ den Durchmesser der Kettenbolzen und f den Koeffizienten der Zapfenreibung bezeichnet.

Hydraulik.



Lehrsatz.

1. Bei eingeschlossenen flüssigen Massen ist, wenn das Eigengewicht der Masse unberücksichtigt bleibt, der normale Wanddruck pro Quadrateinheit eben so gross und von gleicher Art, wie derjenige Druck p_1 , welcher auf die Quadrateinheit der Angriffsfläche f ausgeübt wurde

$$p = p_1$$

2. Der normale Wanddruck auf ganze Flächen F_1 und F_2 verhält sich, wie der Quadratinhalt der Flächen selbst:

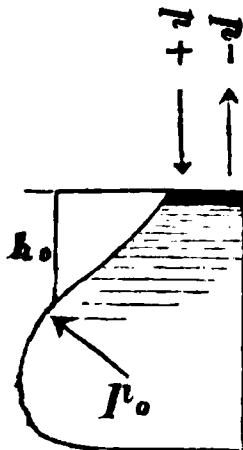
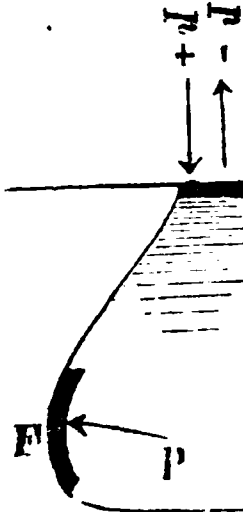
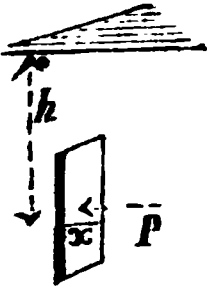
$$P_1 : P_2 = F_1 : F_2.$$

3. Der normale Wanddruck einer flüssigen Masse unter alleiniger Einwirkung ihres Eigengewichtes, auf einem materiellen Punkte (kleine Fläche φ), ist gleich dem Gewichte einer Flüssigkeitssäule, die zur Basis den materiellen Punkt, und zur Höhe den Niveauabstand desselben hat:

$$p_2 = \varphi h \cdot \gamma.$$

4. Der Druck auf eine ganze beliebig geformte und beliebig liegende Fläche ist dabei:

$$\begin{aligned} P &= \gamma (\varphi h + \varphi_1 h_1 + \dots), \\ &= \gamma \sum \varphi h. \end{aligned}$$

Figur.	Lehrsatz.
	<p>5. Der auf den materiellen Punkt (kleine Fläche φ) stattfindende, von der Schwerkraft und einer fremden Kraft zugleich herrührende, normale Wanddruck ist = dem Gewichte einer Flüssigkeitssäule, die zur Basis den materiellen Punkt und zur Höhe den Niveauabstand desselben hat \pm dem von der fremden Kraft ($= p$) pro Quadeinheit ausgehenden Drucke, d. h.:</p> $p_0 = \varphi \gamma h_0 \pm \varphi p,$
	<p>6. Der normale Wanddruck P auf eine beliebig geformte und beliebig liegende Wandfläche F ist:</p> $P = \Sigma \varphi \gamma h_0 \pm F p.$ <p>Für eine ebene Fläche ist:</p> $P = F h \gamma \pm F p,$
	<p>7. Der normale Wanddruck einer flüssigen Masse gegen eine ebene vertikale Fläche F, ist = ihrem Horizontaldrucke und = dem Gewichte einer Flüssigkeitssäule, welche zur Basis die Fläche F, und zur Höhe den Niveauabstand h des Flächenschwerpunktes hat \pm dem von einer äusser-</p>

Figur.	Lehrsatz.
--------	-----------

lichen Kraft etwa herrührenden, auf F , lastenden Drucke, oder:

$$P, = F, h \gamma \pm F, p.$$

Für $p = 0$ ist der Normaldruck:

$$P, = F, h \gamma.$$

8. Der Mittelpunkt des Druckes, d. h. der Angriffspunkt von P , liegt tiefer als der Schwerpunkt. Sein Niveauabstand ist:

$$s = \frac{\gamma \text{ Trägheits-M. v. } F, \pm p \text{ Stat.-M. v. } F,}{\gamma \text{ Stat.-M. von } F, \pm p \cdot F,}.$$

Für $p = 0$ ist der Niveauabstand des Mittelpunktes des Druckes:

$$s = \frac{\text{Trägheits-Mom. von } F,}{\text{Stat.-Mom. von } F,}.$$

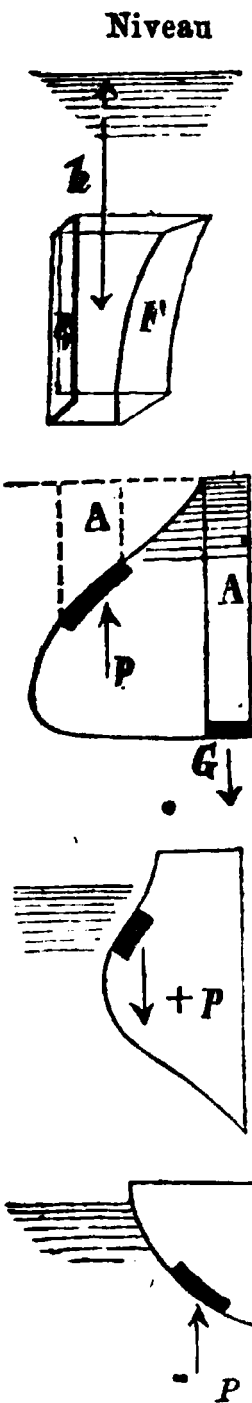
9. Der normale Wanddruck auf den materiellen Punkt (kleine Fläche φ) zerlegt sich in einen Horizontaldruck:

$$p_h = \varphi \gamma h_0 \sin. \alpha \pm \varphi p \sin. \alpha$$

und in einen Vertikaldruck:

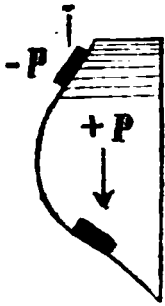
$$p_v = \varphi \gamma h_0 \cos. \alpha \pm \varphi p \cos. \alpha,$$

worin h_0 den Niveauabstand des materiellen Punktes und α den Neigungs \angle seiner kleinen Fläche φ gegen den Horizont bedeutet. Der Vertikaldruck p_v kann sowohl abwärts, wie aufwärts gerichtet sein. Im letzten Falle heisst er Auftrieb.

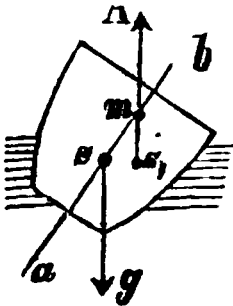
Figur.	Lehrsatz.
	<p>10. Der Horizontaldruck P, auf einer beliebig geformten und beliebig liegenden Wandfläche F in irgend einer Richtung xx ist = dem Drucke auf ihrer Vertikalprojektion F, in Richtung xx.</p> <p>Bedeutet h den Niveauabstand des Schwerpunktes von F, und p den etwa vorhandenen von fremden Kräften herührenden Druck pro \square Einheit, so ist</p> $P, = F, h \gamma \pm p F,.$ <p>11. Der Vertikaldruck einer flüssigen Masse auf eine beliebig geformte und beliebig liegende Wandfläche ist gleich dem Gewichte einer darüber stehenden, bis ins Niveau reichenden Flüssigkeitssäule \pm dem auf der Wandfläche etwa lastenden fremden Drucke oder</p> $P = \gamma \cdot \text{Körper } A.$ <p>Bei den nach dem Innern der Flüssigkeit geneigten Wandflächen geht der Vertikaldruck von unten nach oben, und ist hier Auftrieb = $-P$. Bei den auswärts geneigten Flächen geht P abwärts und ist hier Niederdruck = $+P$.</p>

Figur.

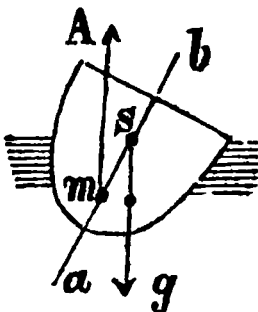
Lehrsatz.



Figur 1.



Figur 2.



12. Bei einer mehrfach gekrümmten Fläche ist der resultierende Vertikaldruck entweder $+P$ oder $-P$, d. h. entweder Niederdruck oder Auftrieb.

13. Der Auftrieb gegen einen schwimmenden Körper ist $=$ dem Gewichte des durch den Körper verdrängten Wassers.

14. Der Auftrieb hat seinen Angriffspunkt im Schwerpunkte der verdrängten Wassermasse.

15. Wird ein schwimmender Körper aus der Gleichgewichtslage gebracht, so wird die Axe $a\ b$ von dem Eigengewicht g des Körpers und von dem Auftriebe A in 2 verschiedenen Punkten s und m ergriffen. Beide Kräfte bilden einen Drehzwilling (Kräftepaar) und drehen daher die in eine schiefe Lage gebrachte Axe $a\ b$ weiter.

Liegt m , das sogen. Metacentrum, über dem Schwerpunkt s , so erfolgt die Drehung in der Figur 1 von rechts nach links und der Körper kommt wieder in die Gleichgewichtslage.

Er schwimmt mit Stabilität und es wird dieselbe um so grösser — je grösser der Abstand $s\ m$ des Metacentrums vom Schwerpunkte ist.

Fällt das Metacentrum m Fig. 2 unter den Schwerpunkt s , so dreht das Kräftepaar $A\ g$ die Axe $a\ b$ nach links und der schwimmende Körper kantet um.

Lehrsatz.

16. Ist G das Gewicht eines unter Wasser getauchten Körpers, P der Auftrieb, γ das Eigengewicht des Wassers γ , jenes des Körpers, so ist

$$\frac{\gamma}{\gamma} = \frac{G}{P},$$

und das specifische Gewicht des Körpers

$$E = \frac{\text{absolutes Gewicht}}{\text{Gewichtsverlust im Wasser}}.$$

17. In kommunizirenden Röhren verhalten sich die Höhen verschiedener Flüssigkeiten umgekehrt wie die specifischen Gewichte.

18. Zur Bestimmung der Wanddicke von Röhren dient die folgende Tabelle. Darin bedeutet

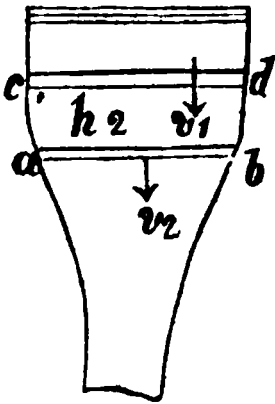
δ die Wanddicke,

d den inneren Durchmesser,

n den Wanddruck in Atmosphären.

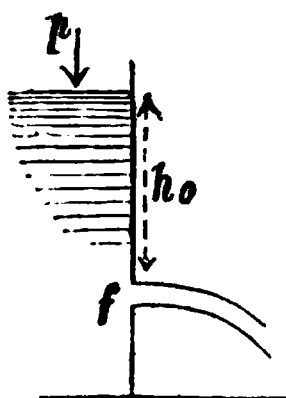
Material.	Rohrstärke δ in Centimetern.
Eisenblech	$\delta = 0,00086 \, nd + 0,30.$
Gusseisen	$\delta = 0,00238 \, nd + 0,85.$
Kupfer	$\delta = 0,00148 \, nd + 0,40.$
Blei	$\delta = 0,00242 \, nd + 0,50.$
Zink	$\delta = 0,00507 \, nd + 0,40.$
Holz	$\delta = 0,03230 \, nd + 2,70.$
natürliche Steine	$\delta = 0,03690 \, nd + 3,00.$
künstliche Steine	$\delta = 0,05380 \, nd + 4,00.$

Wasser und Gasleitungsröhren wurde mit 10 Atmosphären Druck geprüft, und hat man daher hier $n = 10$ zu setzen.

Figur.	Lehrsatz.
	<p>19. Lastet auf einer Flüssigkeit ein fremder nicht von ihrem Eigengewicht herrührender Druck p pro □ Einheit, und ist γ das Eigengewicht der Flüssigkeit, so ist $\frac{p}{\gamma}$ die hydrostatische Druckhöhe von p, d. h. der Druck p kann durch eine Flüssigkeitssäule von der Höhe $\frac{p}{\gamma}$ ersetzt werden.</p>
	<p>20. Der Wanddruck des fließenden Wassers ist kleiner als der des stillstehenden. Man nennt den Letztern den hydrostatischen, den Erstern den hydraulischen Druck.</p>
	<p>21. Bezeichnet h_2 den Höhen-Abstand zweier Profile $a b$ und $c d$; v_1 die Geschwindigkeit im Profil $c d$; v_2 jene im Profil $a b$, und p den Druck pro □ Einheit über Profil $c d$, so ist die hydraulische Druckhöhe in dem Punkt a und b.</p> $= \frac{p}{\gamma} + h_2 - \left(\frac{v_2^2}{2g} - \frac{v_1^2}{2g} \right)$ <p>Man nennt $\frac{v_2^2}{2g}$ und $\frac{v_1^2}{2g}$ die Geschwindigkeitshöhen zu den Geschwindigkeiten v_2 und v_1, und kann daher behaupten, dass die hydraulische Druckhöhe von irgend einer Stelle der Wandung gleich</p>

Figur.

Lehrsatz.



ist der hydrostatischen Druckhöhe $\frac{p}{\gamma} + h_2$, vermindert um die Differenz der Geschwindigkeitshöhen das Wasser an dieser und an der Eintrittsstelle.

22. Beim Ausfluss des Wassers treten verschiedene Bewegungshindernisse, wie Reibung, Kontraktion etc. ein. Man nennt die Ausflussgeschwindigkeit, welche ohne jene Hindernisse vorhanden sein müsste, die theoretische Ausflussgeschwindigkeit im Gegensatze zur wahren. Bezeichnet h_0 den Niveauabstand einer kleinen Ausflussöffnung, p den von äusserlichen Kräften etwa herrührenden Druck pro \square Einheit, c die Geschwindigkeit des zufließenden Wassers, so ist die theoretische Ausflussgeschwindigkeit:


$$v_t = \sqrt{2g \left(h_0 + \frac{c^2}{2g} \pm \frac{p}{\gamma} \right)}.$$

Für p und $c = 0$ ist

$$v_e = \sqrt{2g h_0},$$

d. h. die Ausflussgeschwindigkeit v_t ist ebenso gross, als wenn das Wasser aus der Höhe h_0 herabgefallen wäre. Diese Höhe, die also die Geschwindigkeit v_t erzeugt, nennt man die Geschwindigkeitshöhe zu v^t (vgl. 18) und es ist:

$$h_0 = \frac{v_t^2}{2g}$$

Figur.	Lehrsatz.
 <p>The diagram shows a container with a liquid level indicated by a horizontal line labeled 'Niveau.' and 'h₀'. Below the level, there are several horizontal lines representing different heights within the container. At these heights, there are small circles representing openings. The lowest opening is labeled 'P'. The container is shown in cross-section, with dashed lines indicating the vertical positions of the openings relative to the liquid level.</p>	<p>23. Die theoretische Ausfluss für eine Oeffnung von der Gröss materiellen Punktes (kleine Fläche</p> $W = q v_t \text{ pro Sek.}$ <p>Dieselbe ist für einen horizon unendlich schmalen Streifen vom Fl Inhalt f</p> $W = f v_t = f \sqrt{2g h_0}.$ <p>Für eine ganze aus den St f, f_1, f_2, \dots bestehende grössere nung ist:</p> $\begin{aligned} W &= \sum f v, \\ &= f_1 v_1 + f_2 v_2 + f_3 v_3 \dots \\ &= \sqrt{2g} (f_1 h_1^{1/2} + f_2 h_2^{1/2} + f_3 h_3^{1/2} \dots \end{aligned}$ <p>wonach die Berechnung der theoret. Ausflussmenge für beliebig geformte dungen erfolgen kann.</p> <p>24. Aus der theoretischen Au menge, die für verschiedene Oeffn in Tabelle 1 berechnet ist, ergib die wahre Ausflussmenge \mathfrak{W} durch tiplikation mit gewissen Erfah zahlen k, die man Ausflusskoeffiz nennt, und die in Tabelle 2 zusan gestellt sind.</p> <p>Es ist immer</p> $\mathfrak{W} = k W$ <p>und die middle wahre Ausflussageschw keit durch eine Oeffnung vom Quersch</p> $v = \frac{\mathfrak{W}}{F}.$

Bewegung des Wassers in Flüssen und Kanälen.

Bedeutet t die mittlere Tiefe, also

$$t = \frac{\text{Profilfläche}}{\text{benetzter Umfang}} = \frac{F}{h},$$

α das relative Gefälle pro Längeneinheit,

v die mittlere Geschwindigkeit in einem Profil, so ist nach Brahm

$$v = 90,9 \sqrt{\alpha t},$$

nach Edelwein

$$v = -0,1057 + \sqrt{0,01118 + 8715,6 \alpha t},$$

nach Prony

$$v = -0,2230 + \sqrt{0,0508 + 10301 \alpha t},$$

und die Wassermenge des Stroms oder des Kanals

$$Q = F \cdot v.$$

Aus den Messungen von Humphrey & Abbot am Mississippi hat man neuerdings folgende Formen abgeleitet.

Es bedeutet darin:

a den Flächeninhalt des Wasserprofils,

p den benetzten Umfang,

$J = \frac{h}{l}$ das Gefälle pro Längeneinheit,

W die Breite des Wasserspiegels,

$$R_1 = \frac{a}{p + W} \text{ und } R = \frac{a}{p},$$

n den Rauheitskoeffizienten, die Längen in Metermass gemessen.

 Bewegung des Wassers in Flüssen und Kanälen.

Formel von Humphrey & Abbot, abgekürzt durch
 Chezy:

$$v = 8,32 \sqrt{R} \sqrt[4]{J}$$

Formel von Bazin:

$$v = \sqrt{\frac{R J}{\alpha + \frac{\beta}{R}}}$$

in ist

	α	β
. für glatte Wände	0,0015	0,0000045,
. für raue Wände	0,00019	0,0000133,
. für Bruchsteinwände	0,00024	0,0000600,
. für Erdwände	0,00028	0,0003500.

Formel von Gaukler:

. wenn $J > 0,0007$

$$\sqrt[3]{v} = \alpha \sqrt[3]{R} \sqrt[4]{J},$$

. wenn $J < 0,0007$

$$\sqrt[4]{v} = \beta \sqrt[3]{R} \sqrt[4]{J}.$$

in ist bei Kanälen für Wände

	α	β
Quadern	8,5 bis 10,0	8,5 bis 9,0,
ähnlichem Mauerwerk	7,6 „ 8,5	8,0 „ 8,5,
ähnlicher Sohle, Erde	6,8 „ 7,6	7,7 „ 8,0,
Erde ohne Pflanzen	5,7 „ 6,7	7,0 „ 7,7,
„ mit Pflanzen . . .	5,0 „ 5,7	6,6 „ 7,0,
Flüsse	5,0 „ 5,7	6,4 „ 7,0.

 Bewegung des Wassers in Flüssen und Kan

4) Formel von Hagen:

$$v = 2,425 \sqrt[6]{R} \sqrt[6]{J}.$$

5) Formel von Ganguillets & Kutter

$$v = \left(\frac{Z}{1 + \sqrt[6]{R}} \right) \sqrt[6]{R J}.$$

Darin ist

$$Z = a + \frac{l}{n} + \frac{m}{J}.$$

$$x = \left(a + \frac{m}{J} \right) n,$$

$$a = 23 \quad m = 0,00155,$$

$$l = 1,00 \quad n = 0,008 \text{ bis } 0,04,$$

je nach dem Grade der
benetzten Umfanges.

Tafel I der theoretischen Wassermenge bei Bodendeckel und Seitenöffnungen.

Es bedeutet:

g die Beschleunigung der Schwerkraft und ist, wenn nach
Metermaass gerechnet wird,

$$g = 9,8088,$$

wenn nach preuss. Fussmaass




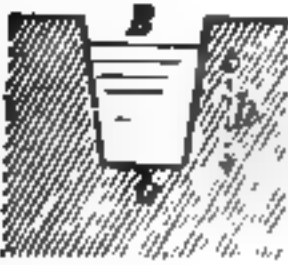
$$g = 31,2528;$$





F den □ Inhalt der Oeffnung;

○ den Schwerpunkt derselben;

W die ausfliessende theoretische Wassermenge pro Sekunde.

Die mittle Ausflussgeschwindigkeit ist stets $= \frac{W}{F}$.

Form der Öffnung.	Theoretische Wassermenge Ausfluss in die freie Luft.
	$W_{\perp} = \frac{2}{3} b h \sqrt{2 g h}$ $= \frac{2}{3} b h^{3/2} \sqrt{2 g}.$
	$W_{\triangle} = \frac{2}{3} b h \sqrt{2 g h}$ $= \frac{2}{3} b h^{3/2} \sqrt{2 g}.$
	$W_{\vee} = \frac{4}{15} b h \sqrt{2 g h}$ $= \frac{4}{15} b h^{3/2} \sqrt{2 g}$
	$W_V = \frac{2}{15} (2 B + 3 b) h$ $= \frac{2}{15} (2 B + 3 b) h^{3/2} \sqrt{2 g}$

Form der Öffnung.	Theoretische Wassermenge W , Ausfluss in die freie Luft.
	$W_{\circ} = \sqrt{2g} r^3$ $= r^{3/2} \sqrt{2g}.$
	$W_{\square} = \frac{2}{3} b \sqrt{2g} (\sqrt{h^3} - \sqrt{h_1^3})$ $= \frac{2}{3} b (h^{3/2} - h_1^{3/2}) \sqrt{2g}.$
	$W_{\angle} = \frac{2}{3} b \sqrt{2g} (\sqrt{h^3} - \sqrt{h_1^3})$ $= \frac{2}{3} b (h^{3/2} - h_1^{3/2}) \sqrt{2g}.$
	$W_{\nabla} =$ $2 b, \sqrt{2g} \cdot \frac{2 h^{3/2} - 5 h h_1^{1/2} + 3 h_1^{3/2}}{15 (h - h_1)}.$

7
8
9

54

¹

4

1

!

1

•



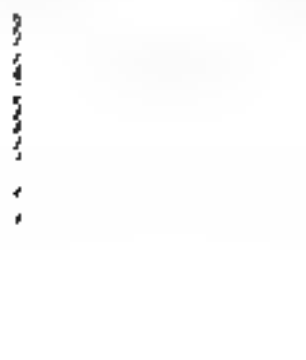

4

Abstract

1

+

12

der Öffnung.	Ausfluss in die
	$W_0 = \frac{r^2 \pi}{2} \sqrt{2 g h} \left(1 - \frac{r^2}{32 h^2} + \frac{1}{h, \pi} \right).$
	$W_0 = \frac{r^2 \pi}{2} \sqrt{2 g h} \left(1 - \frac{r^2}{32 h^2} - \frac{1}{h \pi} \right).$
	$W_0 = \frac{r^2 \pi}{4} \sqrt{2 g h} \left(1 - \frac{r^2}{32 h^2} + \frac{1}{h, \pi} \right).$ $= \frac{W_0}{2}.$
	$W_0 = \frac{r^2 \pi}{4} \sqrt{2 g h} \left(1 - \frac{r^2}{32 h^2} - \frac{1}{h, \pi} \right).$ $= \frac{W_0}{2}.$

12

1

2




3

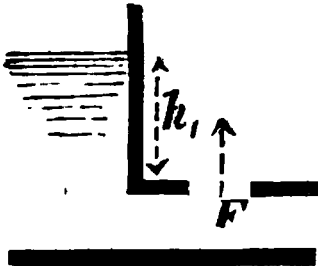
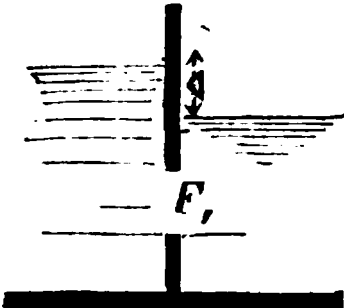
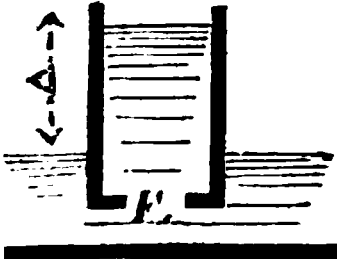
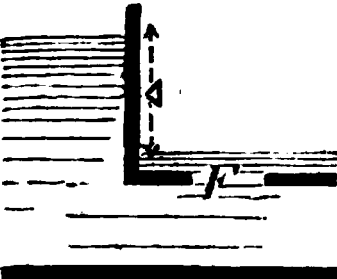
4



5

6

7

Form der Öffnung.	Theoretische Wassermenge W , Ausfluss in die freie Luft.
	$W = W_{\Delta} + W_{\nabla}$ <p>annähernd:</p> $= \frac{b^2}{2} \sqrt{2g \left(h + \frac{b}{2} \right)}.$
	$W = \left(1 - \frac{a^2}{96h^2} \right) a b \sqrt{2gh},$ <p>annähernd:</p> $= a b \sqrt{2gh}.$
	<p>W annähernd:</p> $= F \sqrt{2gh}.$
	$W = F \sqrt{2gh}.$

Lage der Oeffnung.	Theoretische Wassermenge W , Ausfluss unter Wasser.
	$W = F \sqrt{2 g h}.$
	$W, = F \sqrt{2 g \Delta}.$
	$W, = F \sqrt{2 g \Delta}.$
	$W, = F \sqrt{2 g \Delta}.$

Lage öffnung.	Theoretische Wassermenge $W_{,,}$ Ausfluss unter Wasser.
	$W_{,,} = W_{,} + W_{\perp}$ $= F, \sqrt{2g\Delta} + W_{,}$ <p style="text-align: center;">annähernd</p> $= F, \sqrt{2g\Delta} + F \sqrt{2gh_{,,}}$
	$W_{,,} = W_{,} + W_{\perp}, \text{ oder } + W_{\vee}$ $= F, \sqrt{2g\Delta} + \frac{2}{3}b\Delta \sqrt{2g\Delta},$ <p style="text-align: center;">oder</p> $= F, \sqrt{2g\Delta} + \frac{2}{15}(2B + 3b)\Delta^{3/2} \sqrt{2g}.$

Tafel II zur Korrektur der theoretischen Wassermenge in die wahre.

A. Oeffnungen ohne Einlauf, Mundstück oder Auslauf.

Es bedeutet:

W die theoretische Wassermenge beim Ausfluss in die freie Luft.

W , die theoretische Wassermenge beim Ausfluss unter Wasser.

W , die theoretische Wassermenge beim Ausfluss halb unter Wasser, halb in die Luft.

k den Korrektions-Koeffizienten für ganze Oeffnungen.

k , jenen für Wandeinschnitte.

W die wahre Wassermenge.

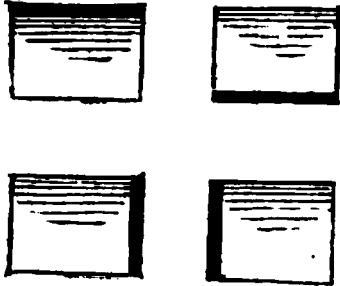
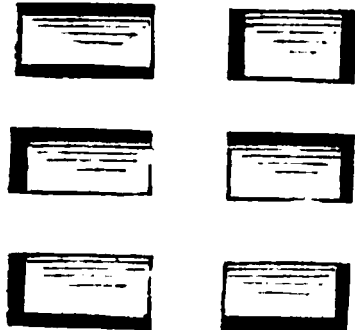
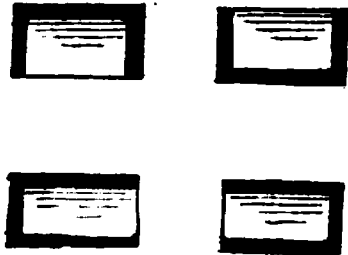
— den scharfkantigen Theil der Oeffnung.

— den kantenlosen Theil der Oeffnung.

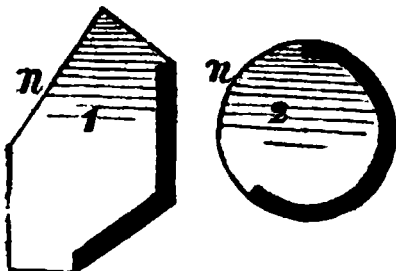
Die Druckhöhen h , sind im stillen Wasser zu messen.

Öffnungen  ohne Mundstück und Einlauf $\Delta = k W$.

Wenn h , in Metern.	k ist bei Öffnungshöhen in Metern von:						Wenn Δ in Metern.
	0,2.	0,1.	0,05.	0,03.	0,02.	0,01.	
0,005	—	—	—	—	—	0,712	0,005
0,01	—	—	0,619	0,657	0,667	0,704	0,01
0,05	0,597	0,611	0,628	0,642	0,659	0,679	0,05
0,1	0,598	0,614	0,631	0,637	0,654	0,666	0,1
0,5	0,604	0,617	0,628	0,630	0,640	0,644	0,5
1,0	0,605	0,615	0,626	0,628	0,633	0,632	1,0
2,0	0,601	0,607	0,613	0,612	0,612	0,611	2,0
3,0	0,601	0,603	0,606	0,608	0,610	0,609	3,0

Form der Oeffnung.	Wassermenge \mathfrak{W} .
	$\mathfrak{W} = 1,125 \text{ k W.}$
	$\mathfrak{W} = 1,072 \text{ k W.}$
	$\mathfrak{W} = 1,035 \text{ k W.}$

p = Umfang der Oeffnung.



n = kantenloser Theil.

Für 1, eckiges Profil,

$$\mathfrak{W} = \left(1 + 0,143 \frac{n}{p}\right) \text{ k W.}$$








Für 2, rundes Profil,

$$\mathfrak{W} = \left(1 + 0,128 \frac{n}{p}\right) \text{ k W.}$$

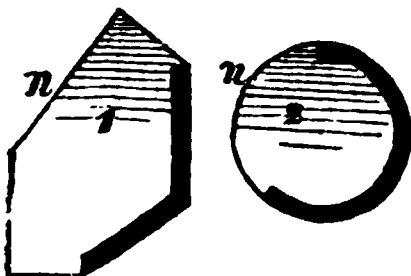
Die Druckhöhen h , sind im stillen Wasser zu messen.

Öffnungen  ohne Mundstück und Einlauf $\Delta = k W$.

Wenn h , in Metern.	k ist bei Öffnungshöhen in Metern von:						Wenn Δ in Metern.
	0,2.	0,1.	0,05.	0,03.	0,02.	0,01.	
0,005	—	—	—	—	—	0,712	0,005
0,01	—	—	0,619	0,657	0,667	0,704	0,01
0,05	0,597	0,611	0,628	0,642	0,659	0,679	0,05
0,1	0,598	0,614	0,631	0,637	0,654	0,666	0,1
0,5	0,604	0,617	0,628	0,630	0,640	0,644	0,5
1,0	0,605	0,615	0,626	0,628	0,633	0,632	1,0
2,0	0,601	0,607	0,613	0,612	0,612	0,611	2,0
3,0	0,601	0,603	0,606	0,608	0,610	0,609	3,0

Form der Oeffnung.	Wassermenge \mathfrak{W} .
 	$\mathfrak{W} = 1,125 \text{ k W.}$
  	$\mathfrak{W} = 1,072 \text{ k W.}$
 	$\mathfrak{W} = 1,035 \text{ k W.}$

p = Umfang der Oeffnung.



n = kantenloser Theil.

Für 1, eckiges Profil,

$$\mathfrak{W} = \left(1 + 0,143 \frac{n}{p}\right) \text{ k W.}$$

Für 2, rundes Profil,

$$\mathfrak{W} = \left(1 + 0,128 \frac{n}{p}\right) \text{ k W.}$$



$$P_B = 1,125 \text{ k, W.}$$

oder

$$P_B = 1,072 \text{ k, W.}$$

oder



$$P_B = 1,125 \text{ k, W.}$$

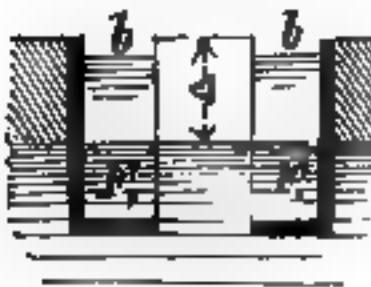
oder oder



$$P_B = 1,125 \text{ k W,} + 1,125 \text{ k, W} \\ = 1,125 [k F, \sqrt{2g\Delta} + k, \frac{1}{2} b \Delta \sqrt{2g\Delta}]$$

Form
der Öffnung.

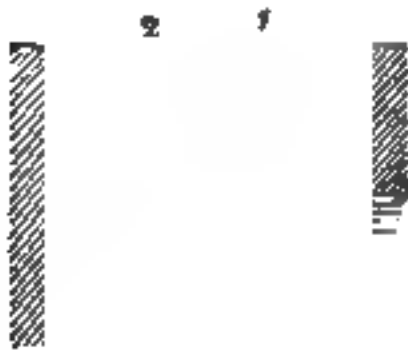
Wassermenge Q .



$$\begin{aligned} Q &= 1,072 \text{ kW}, + 1,125 \text{ k}, W \\ &= 1,072 \text{ kF}, \sqrt{2g\Delta} \\ &+ 1,125 \text{ k}, \frac{2}{3} b \Delta \sqrt{2g\Delta}. \end{aligned}$$



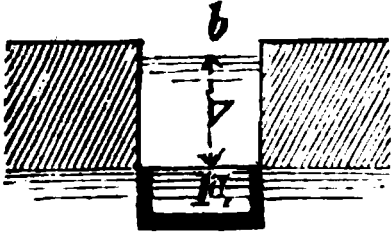
$$\begin{aligned} Q &= 1,035 \text{ kW}, + 1,072 \text{ k}, W \\ &= 1,035 \text{ kF}, \sqrt{2g\Delta} \\ &+ 1,072 \text{ k}, \frac{2}{3} b \Delta \sqrt{2g\Delta}. \end{aligned}$$



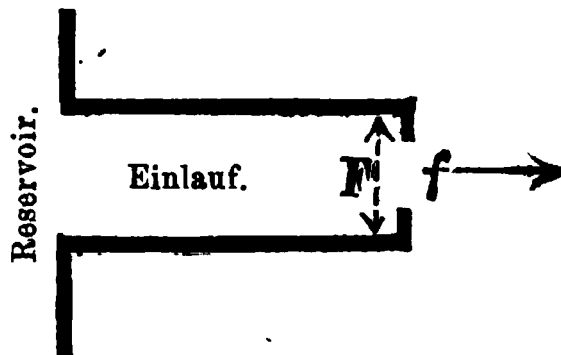
$$\begin{aligned} Q &= W, \text{ für 1,} \\ Q &= W \text{ für 2.} \end{aligned}$$



$$\begin{aligned} Q &= 1,25 \text{ kW}, + W \\ &= 1,125 \text{ kF}, \sqrt{2g\Delta} \\ &+ \frac{2}{3} b \Delta \sqrt{2g\Delta}. \end{aligned}$$

Form der Oeffnung.	Wassermenge \mathfrak{W} .
	$\begin{aligned}\mathfrak{W} &= 1,035 \text{ kW}, + W \\ &= 1,035 \text{ k} \sqrt{2 g \Delta} \cdot F, \\ &+ \frac{2}{3} b \Delta \sqrt{2 g \Delta}.\end{aligned}$

B. Oeffnungen mit Einlauf.



Es bedeutet:

\mathfrak{W} die wahre Wassermenge, wenn kein Einlauf vorhanden wäre;

W die wahre Wassermenge mit Einlauf;

F das Wasserprofil des Einlaufs;

f das Wasserprofil der Oeffnung.


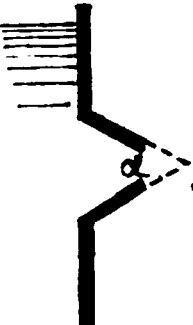
$$n = \frac{f}{F}.$$

.

▶

■

■

	Mundstück- weite. Centimeter.	Wassermenge \mathfrak{W} aus cylindrischen Mundstücken. (Kurze Ansatzröhre.)
	1	$\mathfrak{W} = 0,843 \text{ W},$
	2	$\mathfrak{W} = 0,832 \text{ W},$
	3	$\mathfrak{W} = 0,821 \text{ W},$
	4	$\mathfrak{W} = 0,810 \text{ W}.$
	Convergenz- Winkel "	Wassermenge \mathfrak{W} aus konischen Mundstücken. (Kurze Ansatzröhre.)
	4 Grad	$\mathfrak{W} = 0,905 \text{ W},$
	8 „	$\mathfrak{W} = 0,937 \text{ W},$
	10 „	$\mathfrak{W} = 0,943 \text{ W},$
	12 „	$\mathfrak{W} = 0,946 \text{ W},$
	14 „	$\mathfrak{W} = 0,943 \text{ W},$
	18 „	$\mathfrak{W} = 0,930 \text{ W},$
	20 „	$\mathfrak{W} = 0,921 \text{ W},$
	24 „	$\mathfrak{W} = 0,910 \text{ W},$
	30 „	$\mathfrak{W} = 0,894 \text{ W},$
	35 „	$\mathfrak{W} = 0,882 \text{ W},$
	40 „	$\mathfrak{W} = 0,870 \text{ W}.$

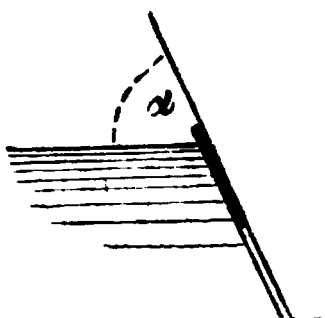
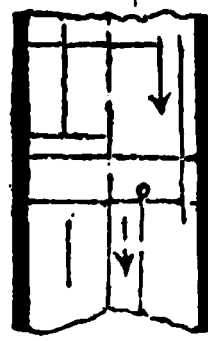
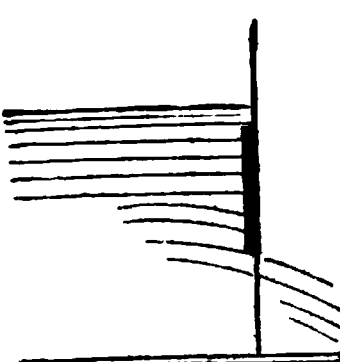
Befindet sich vor den Mündungen ein Einlauf, der nicht wenigstens 4 mal breiter ist, als die Mündung, so ist

$$\mathfrak{W} = (1 + 0,102 n + 0,067 n^2 + 0,046 n^3) k \text{ W}.$$

D. Oeffnungen mit Mundstück und Einlauf. (Schützöffnungen.)

Es bedeutet:

\mathfrak{W} die wahre Wassermenge;
W die theoretische.

Schützöffnung.	Neigungs- Winkel α	Wassermenge \mathfrak{W} .
	40	$\mathfrak{W} = 0,83 W,$
	45	$\mathfrak{W} = 0,81 W,$
	50	$\mathfrak{W} = 0,79 W,$
	55	$\mathfrak{W} = 0,76 W,$
	60	$\mathfrak{W} = 0,74 W,$
	α	$\mathfrak{W} = (1 - 0,0043 \alpha^0) W.$
		

Steht der Schütz vertikal, so berechne man die Wassermenge ganz so, als ob kein Auslauf (Gerinne) vorhanden wäre. Ist jedoch bei

Tafel zur Berechnung der Rohrleitungen.

Es bedeutet:

H das ganze Gefälle;

h den Gefällverlust beim Eintritt des Wassers in die Leitung;

h_1 „ „ in die Leitung selbst;

h_2 „ „ bei Kniestücken;

h_3 „ „ bei Krümmungen;

h_4 „ „ bei Verengungen;

$h_0 = H - h_1 - h_2 - h_3 - h_4$ das übrig bleibende wirk-
same Gefälle;

L die Länge der Leitung;

U den inneren Umfang des Rohres;

v die wahre Geschwindigkeit;

Q die wahre Wassermenge pro Sekunde;

β den Krümmungswinkel;

F und F_1 die Profile bei plötzlichen Verengungen;

$\zeta, \zeta_1, \zeta_2, \zeta_3, \zeta_4$ Koeffizienten;

W die theoretische Wassermenge pro Sekunde;

k den Ausflusskoeffizienten.

Man rechnet nach folgenden Gleichungen:

$$h_0 = H - (h_1 + h_2 + h_3 + h_4).$$

$$h_0 = \left(1 + \zeta + \zeta_1 \frac{U}{F} + \zeta_2 + \zeta_3 \frac{\beta}{\pi} + \zeta_4 \right) \frac{v^2}{2g}.$$

$$v = \frac{\sqrt{2gh_0}}{\sqrt{1 + \zeta + \zeta_1 \frac{U}{F} + \zeta_2 + \zeta_3 \frac{\beta}{\pi} + \zeta_4}}.$$

für kreisförmigen Querschnitt des Rohres ist $W = r^2 \pi \sqrt{2gH}$ 

für rechteckigen Querschnitt des Rohres ist $W = ab \sqrt{2gH}$ 

$Q = v \times \text{Querschnitt des Rohres},$

Für gerade und lange Leitungen kann man, wenn darin keine Hähne, Ventile etc. vorkommen:

$$h_2 = 0 \quad h_3 = 0 \quad h_4 = 0 \quad \text{setzen und hat dann einfach}$$

$$h_0 = H - (h + h_1), \text{ oder}$$

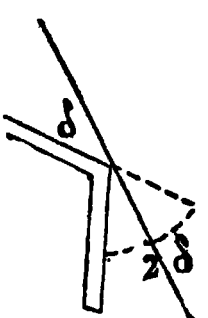
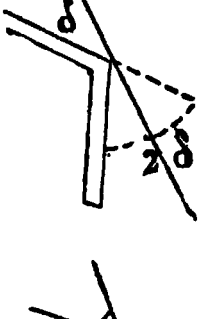
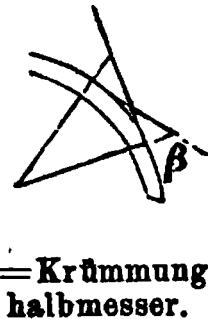
$$h_0 = \left(1 + \zeta + \zeta, L \frac{U}{T}\right) \frac{v^2}{2g}.$$

$$v = \frac{\sqrt{2gh_0}}{\sqrt{1 + \zeta + \zeta, L \frac{U}{F}}}.$$

Da gemeinhin ζ sehr klein gegen $\zeta,$, so hat man auch:

$$h_0 = \left(1 + \zeta, L \frac{U}{F}\right) \frac{v^2}{2g} \quad \text{und} \quad v = \frac{\sqrt{2gh_0}}{\sqrt{1 + \zeta, L \frac{U}{F}}}.$$





In diesen Gleichungen ist:

Figur.	Formel.
	$h = \zeta \frac{v^2}{2g} \text{ und } \zeta = \frac{1}{k^2} - 1.$
	$\left. \begin{aligned} h_1 &= \zeta_1 L \frac{U}{F} \cdot \frac{v^2}{2g} \text{ und} \\ \zeta_1 &= 0,0035975 + \frac{0,00237775}{\sqrt{v}} \end{aligned} \right\}$
	$\left. \begin{aligned} h_2 &= \zeta_2 \frac{v^2}{2g} \text{ und} \\ \zeta_2 &= 0,9457 \sin. \delta^2 + 2,047 \sin. \delta^4. \end{aligned} \right\}$
 <p>$R = \text{Krümmungshalb-}$ messer. $r = \text{halbe Rohr-}$ weite.</p>	$h_3 = \zeta_3 \frac{\beta}{\pi} \cdot \frac{v^2}{2g} \text{ und}$ $\zeta_3 = 0,131 + 1,847 \left(\frac{r}{R} \right)^{7/2}$ <p>für kreisförmigen Querschnitt.</p> $\zeta_3 = 0,124 + 3,104 \left(\frac{r}{R} \right)^7$ <p>für rechteckigen Querschnitt.</p> $\left. \begin{aligned} h_4 &= \zeta_4 \frac{v^2}{2g}, \\ \zeta_4 &= \left(\frac{F}{k_{,,} F_1} - 1 \right)^2, \end{aligned} \right\}$ <p>wobei $k_{,,}$ den Kontraktions-Koeffizienten bezeichnet.</p>

Werthe des Koeffizienten ζ_1 .



		M e t e r.								
v =	0,0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9
0	∞	0,01107	0,00890	0,00793	0,00735	0,00695	0,00665	0,00643	0,00625	0,00610
1	0,00598	0,00585	... 575	... 568	... 560	... 553	... 548	... 543	... 538	... 533
2	... 528	... 523	... 520	... 515	... 513	... 510	... 508	... 505	... 503	... 500
3	... 498	... 495	... 493	... 490	... 488	... 490	... 485	... 483	... 483	... 48
4	... 477	... 477	... 475	... 475	... 473	... 473	... 470	... 470	... 468	... 46

Werthe der Koeffizienten ζ_2 und ζ_3 .

δ°	10°	20°	30°	40°	45°	50°	55°	60°	65°	70°	Profl.
ζ_2	0,046	0,139	0,364	0,740	0,984	1,260	1,556	1,861	2,158	2,431	 u. 
r/R	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1,0	Profl.
ζ_3	0,131	0,138	0,158	0,206	0,294	0,440	0,661	0,977	1,408	1,978	
ζ_3	0,124	0,135	0,180	0,250	0,398	0,643	1,015	1,546	2,271	3,228	

[illegible]

Koëffizienten ζ_4 .

Hahn im ○ Rohr.		Drehklappe im □ Rohr.		Drehklappe im ○ Rohr.					
Stell- ✕	ζ_4	Stell- ✕	ζ_4	Stell- ✕	ζ_4	Oeff- nungs- ✕	ζ_4	$\zeta_4 = \left(1,645 \frac{F}{F'} - 1\right)^2$, wenig veränderlich, im Mittel $\zeta_4 = 10$ bis 11.	
0		0		0					
5	0,05	5	0,28	5	0,24	15	90,0		
10	0,29	10	0,45	10	0,52	20	62,0		
15	0,75	15	0,77	15	0,90	25	42,0		
20	1,56	20	1,34	20	1,54	30	30,0		
25	3,10	25	2,16	25	2,51	35	20,0		
30	5,47	30	3,54	30	3,91	40	14,0		
35	9,68	35	5,72	35	6,22	45	9,5		
40	17,3	40	9,27	40	10,8	50	6,6		
45	32,2	45	15,07	45	18,7	55	4,6		
50	52,6	50	24,9	50	32,6	60	3,2		
55	106,0	55	42,7	55	58,8	65	2,3		
60	206,0	60	77,7	60	118,0	70	1,7		
65	486,0	65	158,0	65	256,0	—	—		
82	∞	70	368,0	70	751,0	—	—		

Stoss des Wassers.

1) Durch einen Wasserstrahl.

Bezeichnet

P den Stoss oder hydraulischen Druck eines Wasserstrahles gegen eine Fläche in Kilogr.,

F den Querschnitt des Strahles in Quadr.-Metern,

v die Geschwindigkeit des Wassers in Metern pro Sek.,

c die Geschwindigkeit, mit welcher sich die Fläche in der Richtung des Wasserstrahles bewegt, in Metern pro Sek.

Q die Wassermenge, welche pro Sek. zum Stosse gelangt, in Cub.-Metern,

γ das Gewicht eines Cub.-Meter Wasser in Kilogr.,

so hat man:

a) Für den Stoss normal gegen eine ebene Fläche:

$$P = \frac{v - c}{g} Q \gamma,$$

und wenn die Fläche in Ruhe ist:

$$P = 2 \frac{v^2}{2g} F \gamma = 2 F h \gamma.$$

b) Für den Stoss gegen eine hohle Fläche, durch welche die Richtung des Strahles in die entgegengesetzte verwandelt wird:

$$P = 2 \frac{v - c}{g} Q \gamma,$$

und wenn die Fläche in Ruhe ist:

$$P = 4 \frac{v^2}{2g} Q \gamma = 4 F h \gamma.$$

c) Die Leistung $L = P c$ des Stosses ist ein Maximum, wenn $c = \frac{v}{2}$, und ist alsdann:

beim Normalstosse gegen eine ebene Fläche:

$$L = \frac{1}{2} \frac{v^2}{2g} Q \gamma = \frac{1}{2} Q h \gamma,$$

beim Stosse gegen eine hohle Fläche, welche den Strahl in die entgegengesetzte Richtung umbiegt:

$$L = \frac{v^2}{2g} Q \gamma = Q h \gamma.$$

2) Stoss des unbegrenzten Wassers.

Bezeichnet

F den Querschnitt der die Wirkung des Wassers aufnehmenden Fläche in Quadr.-Metern,

v die relative Geschwindigkeit des Wassers und des Querschnitts in Metern pro Sek.,

P den gegen die Fläche ausgeübten Druck in Kilogr.,

γ das Gewicht eines Cub.-Meter Wasser,

k einen von der Form der Fläche abhängigen Koëffizienten,

so hat man

$$P = k \frac{v^2}{2g} F \gamma.$$

Für eine dünne unbewegliche Platte, welche senkrecht gegen die Richtung der Strömung gehalten wird, ist:

$$k = 1,86,$$

bewegt sich aber die Platte in ruhendem Wasser, so ist:

$$k = 1,25.$$

Für einen prismatischen Körper hat man:

bei der relativen Länge	$\frac{L}{\sqrt{F}} =$	1	2	3
wenn der Körper unbeweglich	$k =$	1,48	1,35	1,33
wenn der Körper sich in ruhendem Wasser bewegt	$k =$	1,28	1,30	1,33

Ein Prisma, welches nur zum Theil in Wasser taucht ist, und dessen Länge gleich der 5- bis 6fachen ist:

$$k = 1,00,$$

Wenn sich am Vordertheil des schwimmenden Prismas eine Zuschärfung, so hat man:

$$\text{Für eine Zuschärfung von } \begin{array}{|c|c|c|} \hline 156^\circ & 60^\circ & 18^\circ \\ \hline k = & 0,96 & 0,44 & 0,40. \\ \hline \end{array}$$

Je mehr wird der Widerstand vermindert, wenn an Vorder- und Hintertheile Zuschärfungen und geringe Seitenflächen gibt.

Für sehr gut gebaute Flussdampfschiffe kann man im Allgemeinen annehmen:

$$k = 0,16 \text{ bis } 0,18.$$

Für sehr gut gebaute Seedampfschiffe:

$$k = 0,07 \text{ bis } 0,11.$$

Für Kanaldampfschiffe:

$$k = 0,24 \text{ bis } 0,33.$$

Statik und Dynamik der Luft.

A. Tabelle über den Atmosphärendruck in preussischen, englischen und französischen Maassen.

Die Angaben sind für den praktischen Gebrauch abgerundet.

	Quecksilber- säule.	Wassersäule.	Druck pro Quadrat-Zoll.
Preussen . . .	29 Zoll.	32,8 Fuss.	14 Pfund.
England . . .	29,9 „	33,9 „	14,7 „
Paris	28 „	31,7 „	p. Qu.-Centim.
Frankreich . .	76 Centim.	10,3 Met.	1,03 Kilogr.

1 Pfund Druck pro Quadr.-Zoll preuss. = 5,43 Centim.

Quecksilbersäule = 28,1 Zoll Wassersäule.

1 Kilogr. Druck pro Quadr.-Centim. = 73,5 Centim. Quecksilbersäule, also nahe = 1 Atmosphärendruck.

B. Mariotte'sches Gesetz.

Bei constanter Temperatur ist die Spannung eines Luftquantums seinem Volumen umgekehrt proportional.

zeichnet daher

Spannung, V das Volumen, γ das spec. Gewicht eines Luftquantums,

p_1, γ_1 die Werthe von p, V und γ für einen andern Zustand des Luftquantums, so hat man:

$$\frac{p}{p_1} = \frac{\gamma}{\gamma_1} = \frac{V_1}{V}.$$

O. Gay-Lussac'sches Gesetz.

Bei constanter Spannung sind nach dem Gay-
sehen Gesetze die Volumänderungen eines Luft-
ns proportional seinen Temperaturänderungen.
r Ausdehnungskoeffizient beträgt für 1° Cels.

0,00367, abgerundet = 0,004.

zeichnet daher:

as Volumen, γ das spec. Gewicht eines Luftquantums
bei der Temperatur t° Cels.,

as Volumen, γ_1 das spec. Gewicht eines Luftquantums
bei der Temperatur t_1° Cels.,

man:

$$\frac{V_1}{V} = \frac{\gamma}{\gamma_1} = \frac{1 + 0,004 t_1}{1 + 0,004 t}.$$

Ist ausserdem p die Spannung bei dem Volumen
lie Spannung bei dem Volumen V_1 , so hat man:

$$\frac{V_1}{V} = \frac{\gamma}{\gamma_1} = \frac{1 + 0,004 t_1}{1 + 0,004 t} \frac{p}{p_1}.$$

Bei einer Temperatur von t° Cels. und einer Span-
on p Kilogr. pro Quadr.-Centim. wiegt:

$$1 \text{ Cub.-Meter Luft} = \frac{1,252 p}{1 + 0,004 t} \text{ Kilogr.})$$

Wenn ein gewisses Luftquantum plötzlich sein
n ändert, so erleidet auch die Temperatur desselben
änderung, und man hat alsdann:

$$\frac{1 + 0,004 t_1}{1 + 0,004 t} = \left(\frac{V}{V_1} \right)^{0,41} = \left(\frac{\gamma_1}{\gamma} \right)^{0,41} = \left(\frac{p_1}{p} \right)^{\frac{0,41}{1,41}}.$$

Für Ueberschlags-Rechnungen kann man annehmen:

$$\frac{1 + 0,004 t_1}{1 + 0,004 t} = \sqrt[1,41]{\frac{V}{V_1}} = \sqrt[1,41]{\frac{\gamma_1}{\gamma}} = \sqrt[1,41]{\frac{p_1}{p}}.$$

D. Ausfluss der Luft aus der Oeffnung eines Gefässes.

Bezeichnet

h den Ueberdruck der Luft im Gefässe, durch eine Wassersäule gemessen, in Metern,

g die Beschleunigung der Schwerkraft,

d das spec. Gewicht der ausströmenden Luft oder des ausströmenden Gases,

F den Querschnitt der Ausflussmündung in Quadr.-Metern,

μ den Ausflusskoeffizienten im Mittel = 0,70,

so hat man das Ausflussquantum, welches unter dem äussern Luftdrucke pro Sek. ausströmt:

$$Q = \mu F \sqrt{2 g \frac{h}{d}}.$$

Für atmosphärische Luft darf man annehmen:

$$\frac{1}{d} = 800,$$

und hat dann:

$$Q = 125 \mu F \sqrt{h} = 88 F \sqrt{h} \text{ Cub.-Meter.}$$

E. Druck des Windes gegen eine Fläche.

Bezeichnet v die Geschwindigkeit des Windes in Metern pro Sek., so beträgt der Druck gegen eine ruhende Fläche:

$$0,1185 v^2 \text{ Kilogr. pro Quadr.-Meter.}$$

Tabelle
Geschwindigkeit und Kraft des Windes.

für die Stärke Windes.	Geschwindigkeit pro Sek. Meter.	Druck pro Quadr.-Meter. Kilogr.
.	ca. 2,5	0,76
.	„ 4,7	2,64
weckmässig für mühlen . . .	„ 6,9	5,58
.	„ 12,6	18,8
.	„ 25,1	74,6
.	„ 40,8	197,0

Druck des Windes gegen einen Cylinder (Gas-
trägt 0,57 desjenigen Druckes, der gegen eine
senkrechte Projektion des Cylinders ausgeübt wird.

Belastung der Bau-Konstruktionstheile.

Maximum der zufälligen Belastung bei:

Dachräumen	500 Pfd. pro □ Met.		
Wohnräumen	460	„	„
Tanzsälen	760	„	„
Heuböden	800	„	„
Fruchtböden	900	„	„
Wegebrücken	1250	„	„
Speichern	1500	„	„
Magazinen	3000	„	„

Totalbelastung (Eigengewicht + Nutzlast) für Wohnräume, bei:

a. einfacher bedielter Balkenlage	560	„	„
b. gestrecktem Winkelboden	850	„	„
c. gestaakter, beschütteter und geputzter Decke	1000	„	„
d. bei ganzem Winkelboden	1150	„	„

Totalbelastung für Decken unter:

Tanzsälen	1400	„	„
Werkstätten	1550	„	„

Totalbelastung für gewölbte Decken

mit Fussboden	1550	„	„
-------------------------	------	---	---

desgl. für:

eiserne Dächer	300—400 Pfd. 1
Schieferdächer	400—500 „
Ziegeldächer.	450—550 „

Eigengewicht eiserner Brücken, pro Geleis, w
Spannweite bedeutet:

a. für $l = 10—60$ Meter

$7,5 + 0,51$ Centner pro l

b. für $l = 60—100$ Meter

$8 + 0,61$ „ „

Totalbelastung einer Brücke bei

starkem Menschengedränge 500—600 Pfd. „ [

Für Eisenbahnbrücken rechnet man pro Geleis
motiven mit Tender in der Mitte und für den
Theil der Brückenbahn 450—550 Pfd. pro □ Me

I. Konstruktion der einfach gedrückten oder gezogenen Verbandstücke.

Die gezogenen und einfach gedrückten Verbandstücke unterliegen keiner Biegung.

Bedeutet

k die Druck- oder Zugspannung pro □ Centim., bei der das Material zerstört wird,

μ den Sicherheitsmodul,

f den Querschnitt eines Verbandstückes,

P die Zug- oder Druckkraft, die es dauernd auszuhalten hat, so ist

$$P = \mu f k \text{ und}$$

$$f = \frac{P}{\mu k}.$$

Für Schmiedeeisen ist $\mu = \frac{1}{5}$,

„ Gusseisen bei Zug . $= \frac{1}{5}$,

„ Gusseisen bei Druck $= \frac{1}{10}$,

„ Stahl gehärtet . . . $= \frac{3}{10}$,

„ Stahl ungehärtet . . $= \frac{1}{8}$.

„ Kupfer mit Zug . . $= \frac{1}{8}$,

„ Kupfer mit Druck . $= \frac{1}{16}$,

„ Hölzer u. Bausteine $= \frac{1}{10}$.

Bei starken Erschütterungen, stark wechselnder Belastung und anderen die Haltbarkeit beeinträchtigenden Einflüssen, nehme man μ etwas kleiner an.

**Tabelle über die Zug- und Druckfestigkeit d
materialien.**

Material.	Die Zer- erfolgt Zug bei Pfund pro Qu.-Ctm.	
Schmiedeeisen in Stäben	8000	
Schmiedeeisen in Drähten	13000	
Gusseisen	2600	
Stahl ungehärtet	15000	
Stahl gehärtet	20000	
Kupfer	4000	
Kupferdraht	11000	
Messing	2400	
Messingdraht ,	7200	
Blei	260	
Eichen-Holz	2400	
Kiefern- „	2200	
Buchen- „	1700	
Mauersteine	60	
Klinker	—	
Kalkstein und Marmor	—	
Sandstein	—	320—1000
Granit	—	800 -1600
Basalt	—	3600

Tabelle der spec. Gewichte.

1. Feste Körper.

Antimon	6,72	Holz, lufttrocken,	
Asphalt	1,07—1,16	Fichtenholz	0,47
Basalt	2,8	Kiefern-	0,55
Blei	11,4	„ frisch	0,91
Braunkohle	1,2	Kork-	0,24
Cokes	1,4	Lerchen-	0,47
Eis	0,92	Linden-	0,56
Erde,		Mahagoni-	0,75
lehmig frisch	2,1	Nussbaum-	0,66
trocken	1,9	Pappel-	0,39
mager trocken	1,3	Pock-	1,26
Glas,		Tannen-	0,56
Fenster-	2,64	„ frisch	0,89
Spiegel-	2,46	Weissbuchen-	0,77
Krystall-	2,89	Kalkstein	2,45
Flint-	3,33	Kreide	2,7
Glockenmetall	8,8	Kupfer, gehämmert	8,94
Gold, gegossen	19,26	„ gegossen	8,79
Granit	2,8	Mauerwerk,	
Gusseisen	7,25	Bruchstein-	2,40—2,46
Gyps, gegossen,		Sandstein-	2,05—2,12
trocken	0,79	Ziegelstein-	1,47—1,70
Holz, lufttrocken,		Messing	8,55
Ahorn-	0,67	Platina	22,7
Aepfelbaum-	0,73	Quarz	2,62
Birken-	0,74	Sand, gewöhnlich	
Buchen-	0,75	trocken	1,64
Buxbaum-	0,94	Sandstein	2,35
Eben-, grün	1,21	Schiefer	2,67
„ schwarz	1,19	Schmiedeeisen	7,78
Eichen-	0,69	Silber	10,47
Erlen-	0,5	„ gehämmert	10,51
Eschen-	0,67	Stahl	7,26—7,80

Gussestahl	7,872	Ziegelstein	1,4—2,2
Steinkohle	1,21—1,51	Zink, gegossen . . .	6,80
„ Cannel	1,42	„ gewalzt	7,00
„	9,83	Zinn	7,29

2. Flüssige Körper.

a. 20° C. . . .	0,716	Öel: Olivenöl . . .	0,915
abs. b. 20° C. . .	0,792	Quecksilber b. 0° . .	13,595
„	0,0013	Salpetersäure, conc. .	1,500
„	1,030	Salzsäure, conc. . .	1,200
Öl	0,940	Schwefelsäure, conc. .	1,850
Öl	0,914	Seewasser	1,027

örmige Körper, bei 0° C. und 0,76 Met. Druck.

Luft	1,000	Sauerstoff	1,103
Sauerstoffgas . . .	0,941	Stickstoff	0,976
Wasser	1,529	Steinkohlengas . . .	0,4—0,6
Wasserstoffgas . .	0,985	Wasserstoff	0,069
Wasserdampf . . .	0,559	Wasserdampf b. 100°	0,470

Cub.-Meter destillirtes Wasser wiegt 1000 Kilogr.
10 Zoll-Pfund.

Bezeichnet γ das specifische Gewicht eines Stoffes, V sein
in Cub.-Metern, so ist das absolute Gewicht:

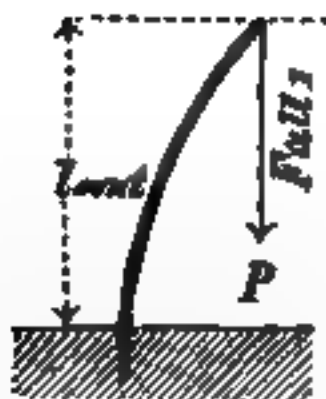
$$G = V\gamma \text{ 1000 Kilogr. oder}$$

$$G = V\gamma \text{ 2000 Zoll-Pfund.}$$

II. Konstruktion der gedrückten und zugleich auf Biegung beanspruchten Verbandstücke.

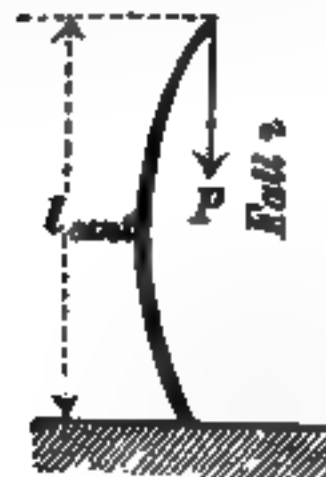
(Streben und Säulen.)

a. Centrische Belastung.



Das untere Ende ist eingespannt:

$$P = a \frac{E J \pi^2}{4 l^2}.$$



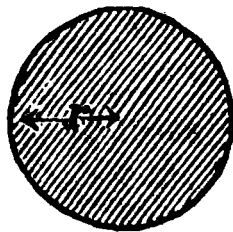
Beide Enden sind frei:

$$P = a \frac{E J \pi^2}{l^2}.$$

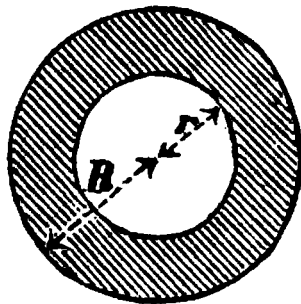
Darin ist:

	a =	E pro □ Cent. =
Für Schmiedeeisen	$\frac{1}{5}$	4000000 Pfund
„ Gusseisen	$\frac{1}{6}$	2340000 „
„ Holz	$\frac{1}{10}$	234000 „

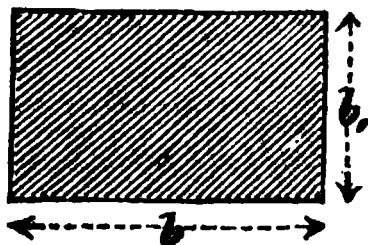
Ferner ist für die nachfolgenden Profilformen:



$$J = \frac{\pi r^4}{4}.$$

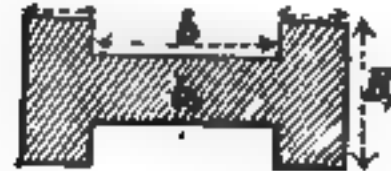


$$J = \frac{\pi}{4} (R^4 - r^4).$$



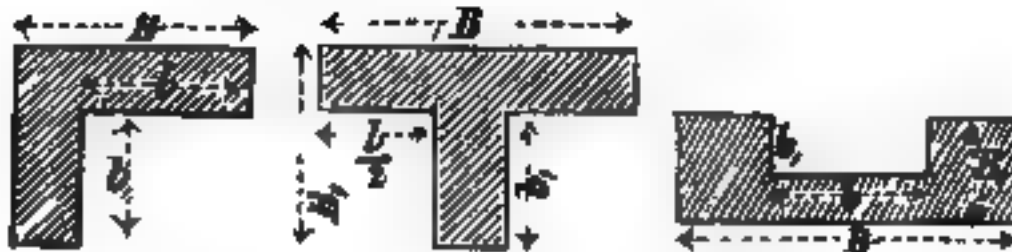
$$J = \frac{1}{12} b h^3.$$

$$J = \frac{1}{12} (B B_1^3 - b b_1^3)$$



$$J = \frac{1}{12} (B B_1^3 - b b_1^3).$$

$$J = 0,541 r^4.$$



$$J = \frac{1}{12} \left[\frac{(B B_1^3 - b b_1^3)^2}{B B_1 - b b_1} - \frac{4 B B_1 b b_1 (B_1 - b_1)^2}{B B_1 - b b_1} \right],$$

wobei B_1 stets die kleinere der beiden Hauptbreiten-
Dimensionen des Profils bedeutet.

Für Façon-Eisen von der Form **T I L C +** etc.,
kann man P annähernd berechnen nach der Gleichung:

$$P = 15 \frac{f k h}{l}$$

Darin ist:

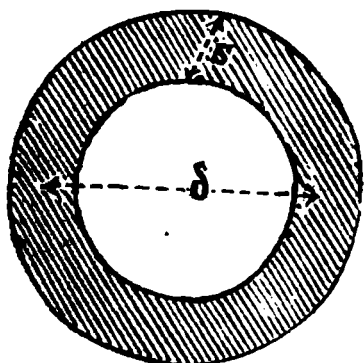
f der Querschnitt des Stabes,

l die Länge des Stabes,

h die kleinste der beiden Breitendimensionen des Profils.

Ferner:

		pro Qu.-Centim.
Für Schmiedeeisen	$k = 1400$ bis 1680 Pfund,
„ Gusseisen	$k = 1000$ „ 1120 „



Für hohle gusseiserne Säulen hat man annähernd:

Im Falle 1

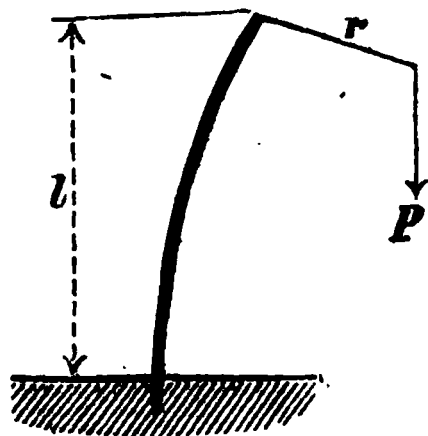
$$2 s \delta^3 = \frac{P l^3}{200000},$$

Im Falle 2

$$2 s \delta^3 = \frac{P l^3}{800000},$$

wobei die Maasse in Centim., P in Zoll-Pfd. zu nehmen.

b. Excentrische Belastung.



$$P = \frac{k}{\frac{1}{f} + \frac{r}{Z}}$$



$$P = \frac{k}{\frac{f}{\cos. \alpha} + \frac{l \sin. \alpha}{Z}}$$

Darin ist:

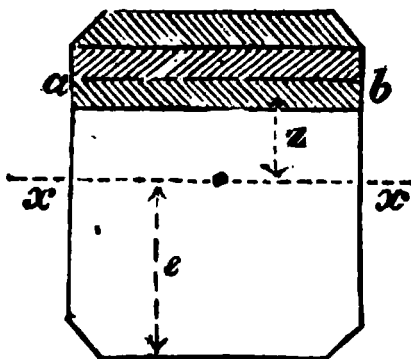
- r Querschnitt des Stabes,
 - Schmiedeeisen = 1400 bis 1680 Pfd. pro □Centim.
 - Gusseisen . . = 1000 „ 1120 „ „ „
 - Holz . . . = 140 „ 170 „ „ „
- den Werthen aus Tabelle I. IIIa. Seite 364.



III^a. Konstruktion der massiven Träger und Balken.

Ist das Profil des projektirten Trägers verzeichnet, so suche man den Schwerpunkt desselben und lege durch denselben die horizontale Axe $x\ x$. Alsdann messe man den Abstand der entferntesten Faserschicht und bezeichne ihn mit e .

Figur 1.



Darauf zerlege man das ganze Profil in lauter schmale Streifen $a\ b$, und messe deren mitteln Abstand z von $x\ x$ mit dem Zirkel nach.

Sind nun $f_1\ f_2\ f_3$ u. s. w. die Flächeninhalte dieser schmalen Streifen in □ Centimetern, und $z_1\ z_2\ z_3$ u. s. w. ihre Abstände von $x\ x$ in Centimetern, so addire man:

$$\begin{aligned} &+ f_1 z_1^2 \\ &+ f_2 z_2^2 \\ &+ f_3 z_3^2 \\ &\text{u. s. w.} \end{aligned}$$

und dividire die Summe mit e . Die Zahl, welche herauskommt, ist mit Z in den nachfolgenden Formeln be-

zeichnet. Für die gewöhnlich vorkommenden Profile kann man sich der nachfolgenden Tabelle I zur leichteren Ermittlung von Z bedienen.

Bezeichnet L die Träger- oder Balkenlänge in Metern, so nehme man den Widerstand W , welchen der Baustoff dauernd dem Zerbrechen oder Verbiegen entgegen setzt, wie folgt an:

- a. für Tanne, Fichte, Kiefer, Lerche $W = \frac{1,2}{L} \cdot Z$;
- b. für trockenes Buchen- u. Eichenholz $W = \frac{1,4}{L} \cdot Z$;
- c. für Eschenholz $W = \frac{1,8}{L} \cdot Z$;
- d. für Schmiedeeisen in dicken Stücken $W = \frac{16,0}{L} \cdot Z$;
- e. für Gusseisen $W = \frac{12,0}{L} \cdot Z$.

Die Tragkraft des Trägers berechne man nun nach den Formeln der nachstehenden Belastungstafel.

Es bedeutet hier:

- G das Eigengewicht des Trägers;
- Q , eine etwaige gleichmässig vertheilte Last;
- Q eine lokale Last.

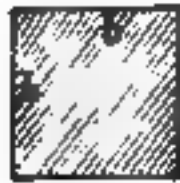
Alles in Zollpfunden.

Für Träger, die nicht aus einem Stücke bestehen, sondern aus mehreren zusammengefügt sind, nehme man

$\frac{3}{4}$ der berechneten Tragkraft.

Tabelle I.

über die Werthe von Z bei den am häufigsten vorkommenden Profilen:



$$Z = \frac{b h^3}{6}$$

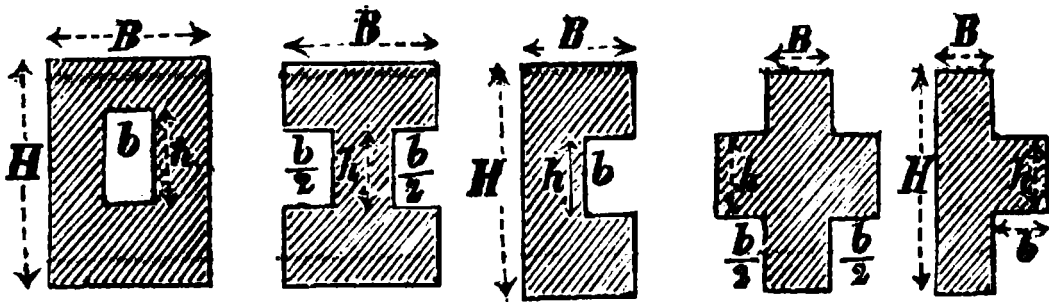


$$Z = 0,0982 a^4$$



$$Z = 0,7854 b a^3$$

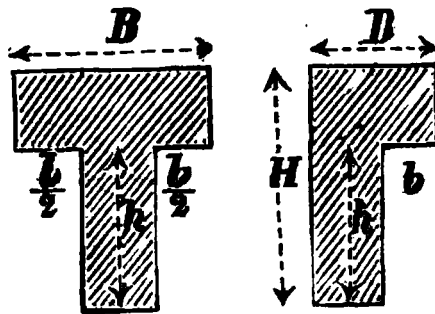
Für alle gefiederten oder ausgenommenen, zur horizontalen Schweraxe symmetrischen Profile:



$$Z = \frac{B H^3}{6} \mp \frac{b h^3}{6 H} \mp \frac{b, h^3}{6 H} \mp \dots$$

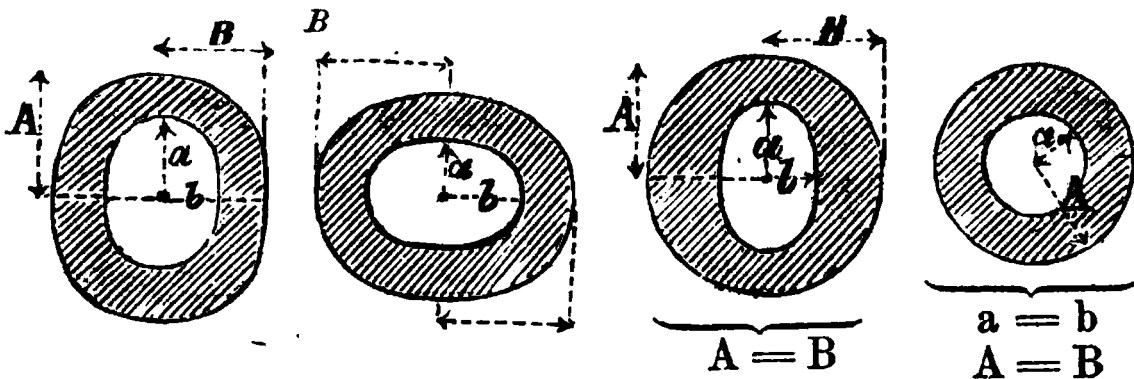
und zwar gilt das — Zeichen für ausgenommene, das + Zeichen für gefiederte Profile.

Für unsymmetrische Profile:







$$Z = \frac{1}{6} \left[(B H^3 - b h^3) - \frac{4 B H b h (H - h)^2}{B H^3 - b h^3} \right]$$

Für alle kreisförmigen oder elliptischen hohlen Profile:



$$Z = 0,785 \left(\frac{B A^3 - b a^3}{A} \right)$$

Für Eisenbahnschienen nehme man durchschnittlich:

Bei einer Höhe von Centim.	Z =	Gewicht pro Meter.
	89,5	57,4 Pfund.
	102,0	64 Pfund.
	125,2	76—80 Pfund.
	Das 3fache obiger Zahlen.	Das 2fache obiger Zahlen.

Für **I** Eisen nehme man:

Höhe.	Steg- dicke.	Gurt- breite.	Gurt- dicke.	Gewicht pro Meter.	Z
Mill.	Mill.	Mill.	Mill.	Pfund.	=
100	5	50	7	17,16	35
100	13	58	7	28,6	49
125	6	75	8	28,2	76
125	13	82	8	40,0	94
150	7	80	9,5	37,1	118
150	13	86	9,5	50,0	140
176	8,5	91,5	9	54,0	160
176	23	106,5	9	88,6	238
200	9	100	11	58,6	239
200	23	114	11	100,8	332
209	13	104,6	14,6	80,2	347
209	19,6	111,2	14,6	99,8	393
235	8,5	91,5	9	60,6	240
235	23	106,5	9	107,6	375
235	13	91,5	14	81	352
235	26	104,5	14	125,0	469
250	11	115	13	83,0	419
250	26	130	13	137,0	575
261	11	98,1	13	83,4	423
261	16,5	104	13	104,6	468
300	13	125	16	115,2	677
300	26	138	16	170,0	875
320	16	137	19	150,4	1021
400	16	140	17	164	1200
588	19	200	17	300	2862
596	19	200	17	320	3578
800	19	200	17	362	4383
1000	19	200	17	422	6136







Für 4kantige Balken findet man Z, indem man die Zahlen in Kol. II der folgenden Tabelle mit der Breite des Balkens in Centimetern multiplicirt.

II. Z b	I. Balken- höhe. Centim.	II. Z b	I. Balken- höhe. Centim.	II. Z b
16 ² / ₃	20	66 ² / ₃	30	150
24	22	80 ² / ₃	32	170 ² / ₃
32 ² / ₃	24	96	34	192 ² / ₃
42 ² / ₃	26	112 ² / ₃	36	216
54	28	130 ² / ₃	38	240 ² / ₃
266 ² / ₃	50	416 ² / ₃	60	1100
294	52	450 ² / ₃	62	640 ² / ₃
322 ² / ₃	54	486	64	682 ² / ₃
352 ² / ₃	56	522 ² / ₃	66	726
384	58	560 ² / ₃	68	770 ² / ₃
816 ² / ₃	80	1066 ² / ₃	90	1950
864	82	1120 ² / ₃	92	1410 ² / ₃
912 ² / ₃	84	1176	94	1472 ² / ₃
962 ² / ₃	86	1232 ² / ₃	96	1536
1014	88	1290 ² / ₃	98	1600 ² / ₃
			100	1666 ² / ₃

s Eigengewicht G ist zu rechnen, bei trockenem
 d Eschenholz . . 1360 Pfund pro Cub.-Meter,
 nd Fichtenholz . 940 „ „ „
 nd Kiefernholz . 1120 „ „ „
 1500 „ „ „

Belastungstafel.



	Art der Belastung.	
1.		
2.		
3.		
4.		
6.		
7.		

Tragkraft in Pfunden.

$$Q = W - \frac{1}{2} G.$$

$$Q = 2 W - G.$$

$$Q_1 = 2 W - G.$$

$$Q_1 = 2 (W - Q) - G$$

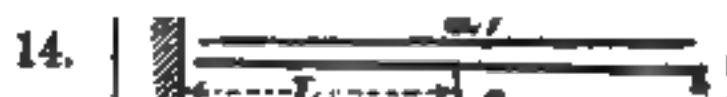
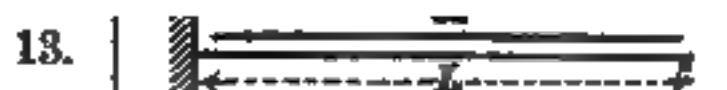
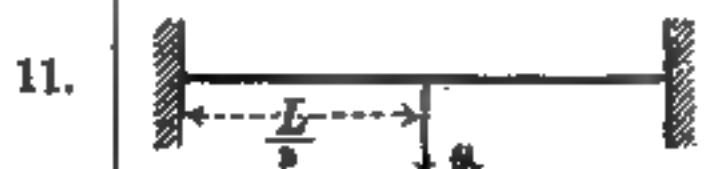
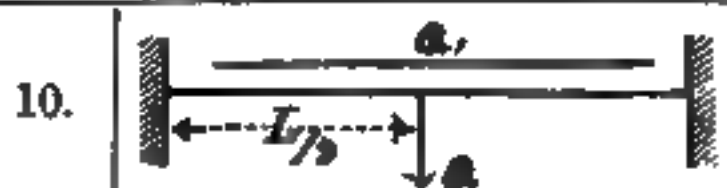
$$Q = W - \frac{Q_1 + G}{2}.$$

$$Q_1 = 2 W - Q - G$$

$$Q = 2 W - Q_1 - G.$$

$$Q = 4 W - \frac{G}{2}.$$

$$Q_1 = 8 W - G.$$



Tragkraft in Pfunden.

$$Q_1 = 8W - 2Q - G$$

$$Q = 4W - \frac{Q_1 + G}{2}$$

$$Q_1 = 12W - G.$$

$$Q_1 = 12W - \frac{3}{2}Q - G$$

$$Q = 8W - \frac{3}{2}(Q_1 + G)$$


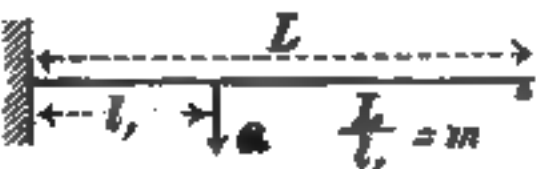
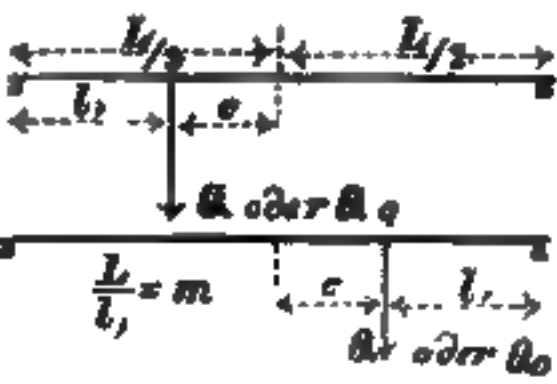
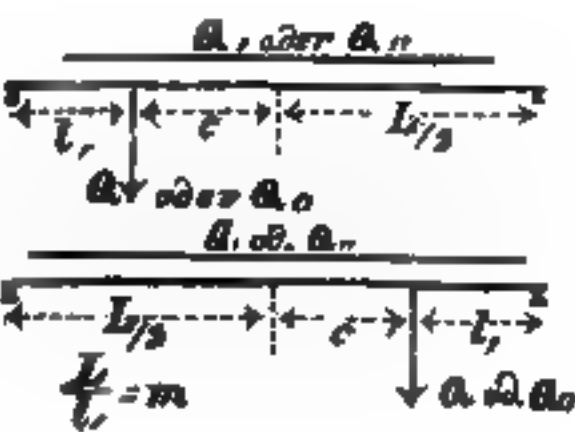
$$Q = 8W - \frac{3}{2}G.$$

$$Q = \frac{16}{3}W - \frac{3}{2}G.$$

$$Q_1 = 8W - G.$$

$$Q_1 = 8W - \frac{3}{2}Q - G$$

$$Q = \frac{16}{3}W - \frac{3}{2}(Q_1 + G)$$

	Art der Belastung.	Tragkraft
15.		
16.		
17.		$Q = m \sqrt{2 W C}$ $Q_0 = W \frac{m^2}{m-1}$
18.		$Q = m \left(\sqrt{2 W (Q_1 + G)} - \frac{Q_1 + G}{2} \right);$ $Q_1 = 2 W \left(1 \pm \sqrt{1 - \frac{Q}{W m}} \right)^2 - G,$ $Q_0 = W \frac{m^2}{m-1} - \frac{Q_1 + G}{2},$ $Q_1 = 2 W \frac{m^2}{m-1} - G - 2 Q.$

in Pfunden.

$$Q_1 = 2W - \frac{2}{m}Q - G$$

$$Q = m \left(W - \frac{Q_1 + G}{2} \right).$$

$$Q = Wm - \frac{Gm}{2}.$$

giltig wenn $\frac{Q}{G} < \frac{C}{1},$

Bruch zwischen Q und Mitte.

giltig wenn $\frac{Q}{G} \geq \frac{C}{1},$

Bruch bei Q.

giltig wenn $\frac{Q}{Q_1 + G} < \frac{C}{1},$

Bruch zwischen Q und Mitte.

giltig wenn $\frac{Q}{Q_1 + G} < \frac{C}{1},$

Bruch zwischen Q und Mitte.

giltig wenn $\frac{Q}{Q_1 + G} \geq \frac{C}{1},$ Bruch bei Q.

giltig wenn $\frac{Q}{Q_1 + G} \geq \frac{C}{1},$ Bruch bei Q.

Art der Belastung.



Q , bedeutet eine gleichmäßig verteilte Last
incl. Trüggewicht.

$$Q = 32 \text{ W.}$$

Dabei ist:

$$\text{Druck in } z = \frac{1}{2} Q,$$

$$\text{Zug in } y = \frac{1}{16} \cdot \frac{Q}{\cos \alpha}.$$

 Tragkraft in Pfunden.

Ist Q , gegeben, so nehme man für den horizontalen Balken a b :

bei den Hölzern ad a Seite 363 $Z = \frac{Q, L}{38}$.

bei den Hölzern ad b Seite 363 $Z = \frac{Q, L}{45}$.

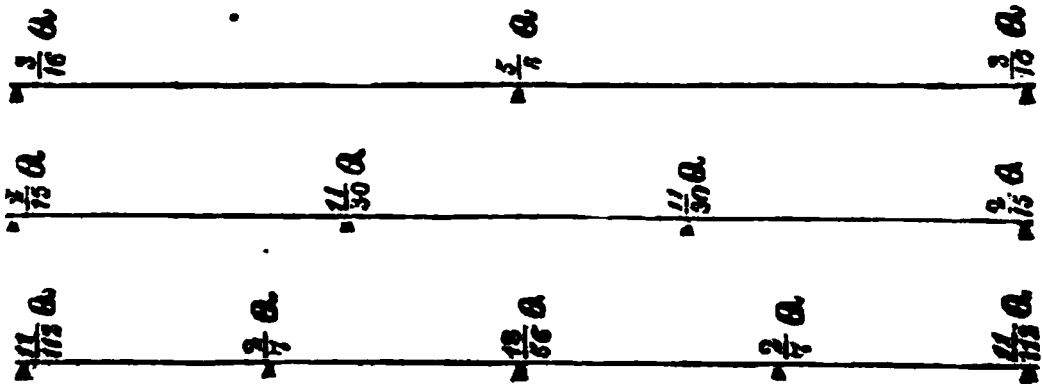
bei den Hölzern ad c Seite 363 $Z = \frac{Q, L}{58}$.

bei Schmiedeeisen $Z = \frac{Q, L}{512}$.

bei Gusseisen $Z = \frac{Q, L}{384}$.

x und y berechne man nach den Formeln der Druck- und Zugfestigkeit.

Auflager-Drucke.



Die Auflager-Punkte haben gleiche Entfernung untereinander und liegen horizontal. Der Träger ist frei aufgelagert und incl. Eigengewicht gleichmässig mit Q belastet.

~~~~~

### **III<sup>b</sup>. Konstruktion der Fachwerkträger.**

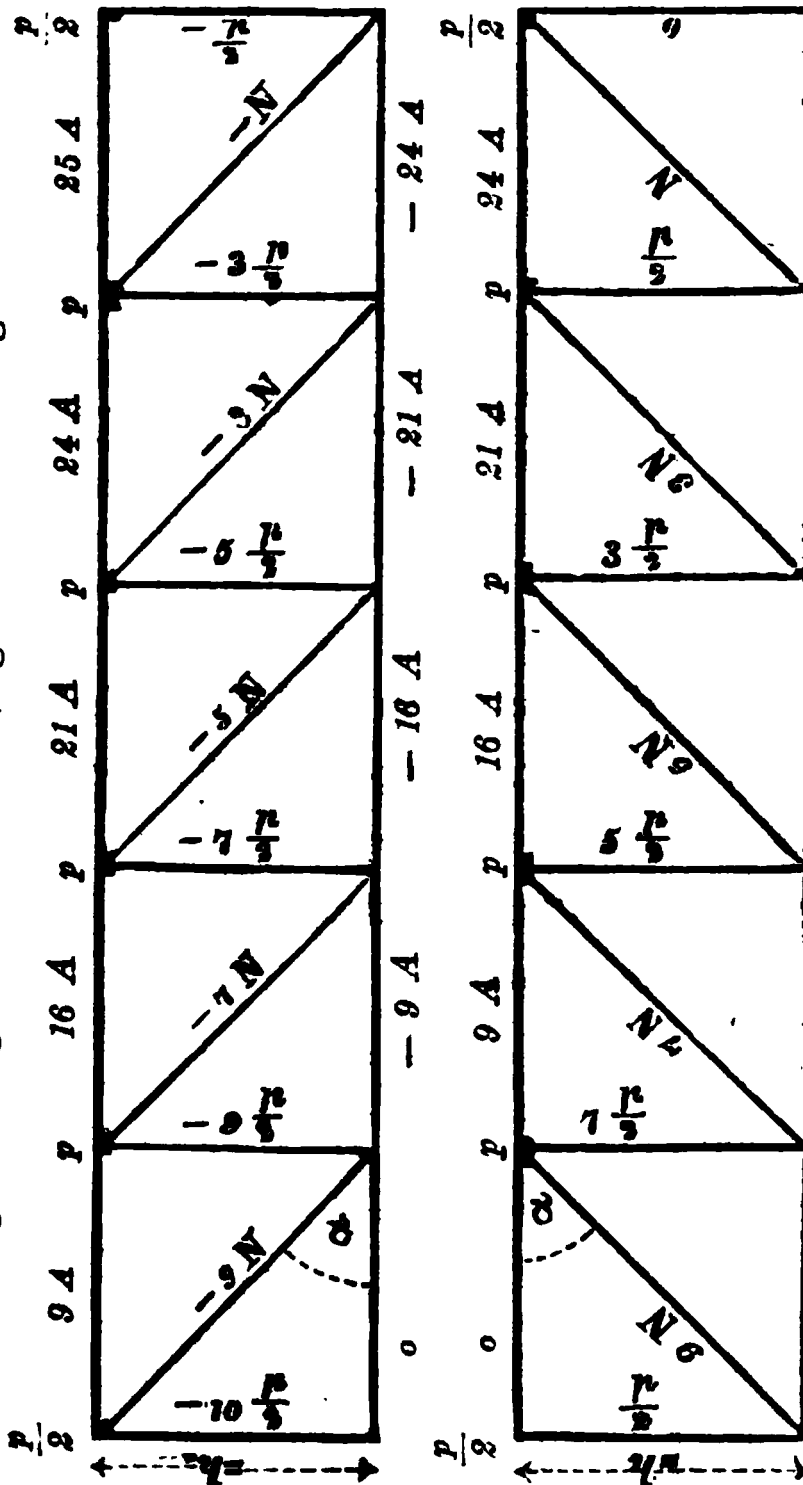
---

Die nachfolgenden Figuren geben die bei gewöhnlicher Fachwerkskonstruktion in den Stangen des Trägers auftretenden Spannungen und Pressungen an.

Die Berechnung der Querschnittsdimensionen dieser Verbandstücke folgt nach I und II.

## Träger-Mitte.

Spannungen in den Stangen eines Trägers.



Obergurtung belastet.

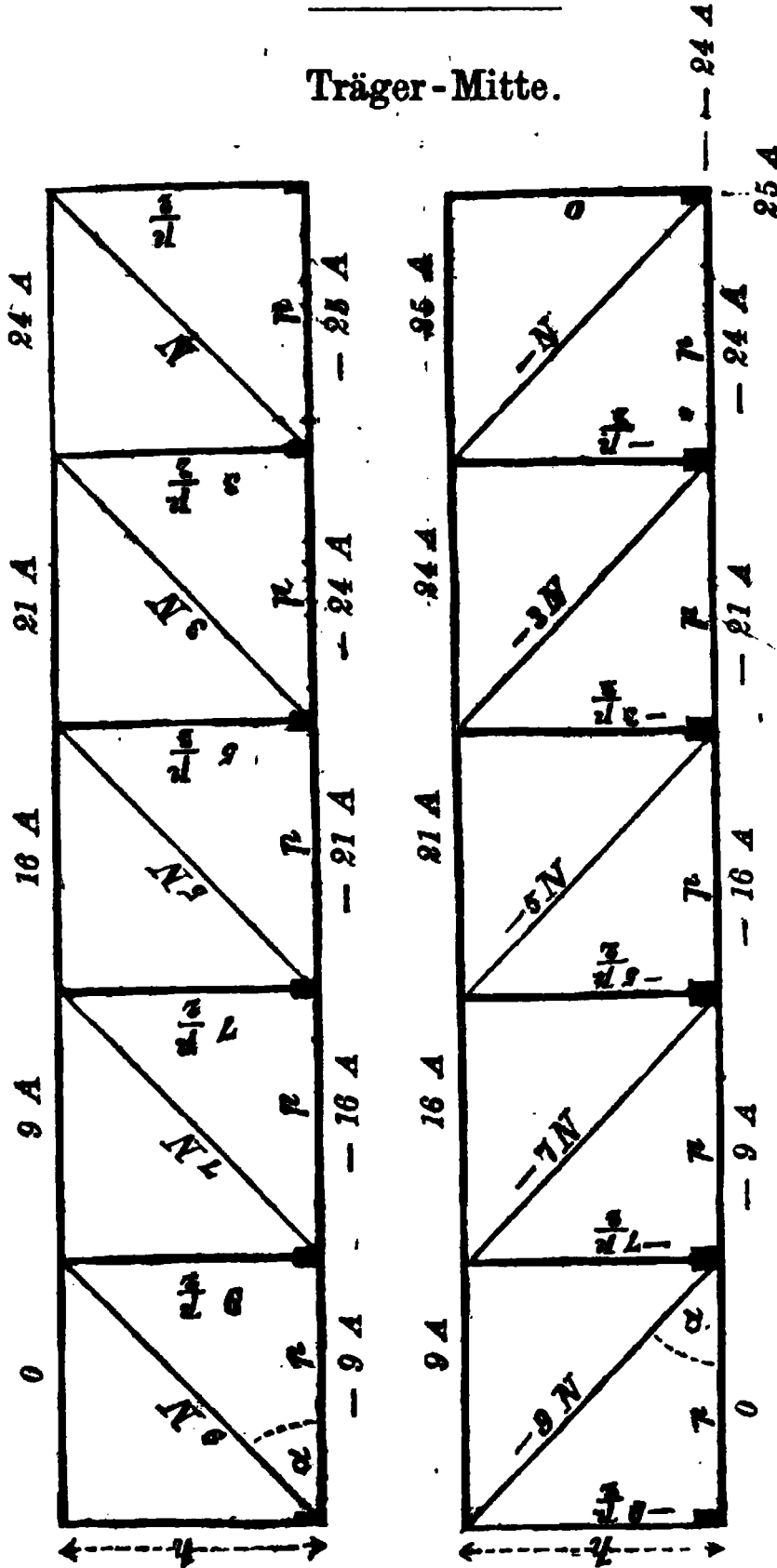
Ganze Trägerlänge = 1. Belastung pro lfd. Einheit =  $q$ .

$$A = \frac{1}{25} \cdot \frac{q l^2}{8 h} \quad p = \frac{q l}{10}.$$

$$N = \frac{A}{\cos. \alpha}.$$

Träger-Mitte.

Spannungen in den Stangen eines Trägers.



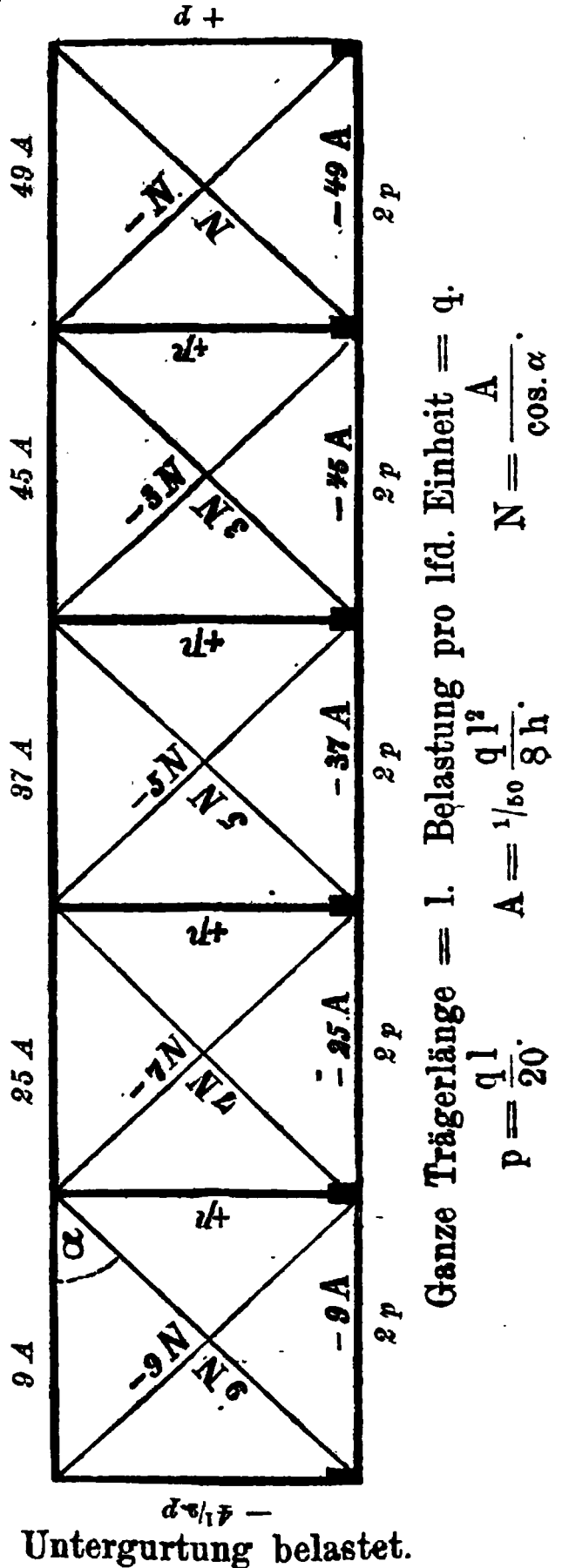
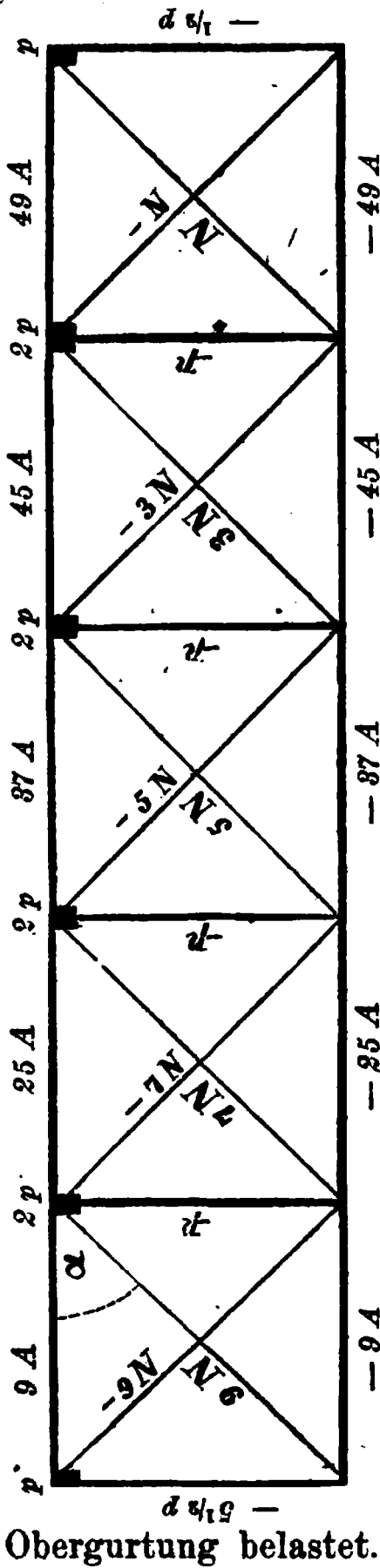
Untergurtung belastet.

Ganze Trägerlänge = 1. Belastung pro lfd. Einheit =  $q$ .

$$p = \frac{ql}{10}, \quad A = \frac{1}{25} \frac{ql^2}{8h}, \quad N = \frac{A}{\cos \alpha}$$

Träger-Mitte.

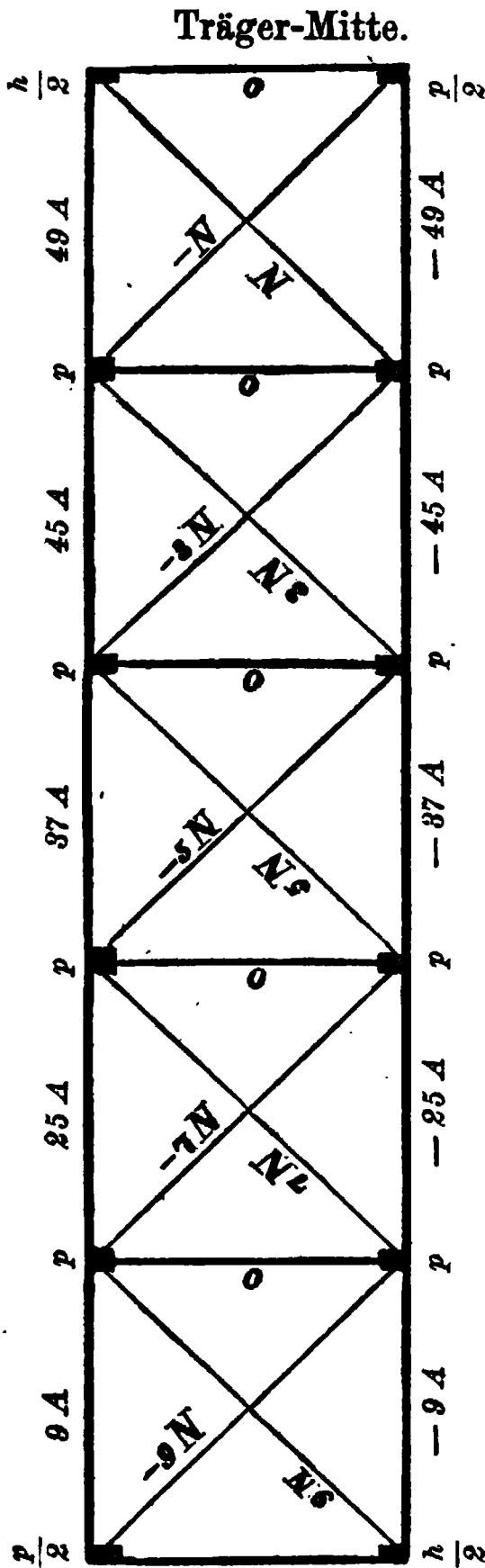
Spannungen in den Stangen eines Trägers.



Ganze Trägerlänge = 1. Belastung pro lfd. Einheit =  $q$ .

$$p = \frac{q l}{20} \quad A = \frac{1}{60} \frac{q l^2}{8 h} \quad N = \frac{A}{\cos. \alpha}$$

Spannungen in den Stangen eines Trägers.



Ober- u. Untergurtung belastet.

Ganze Trägerlänge =  $l$ ,

Belastung pro lfd. Einheit =  $q$ ,

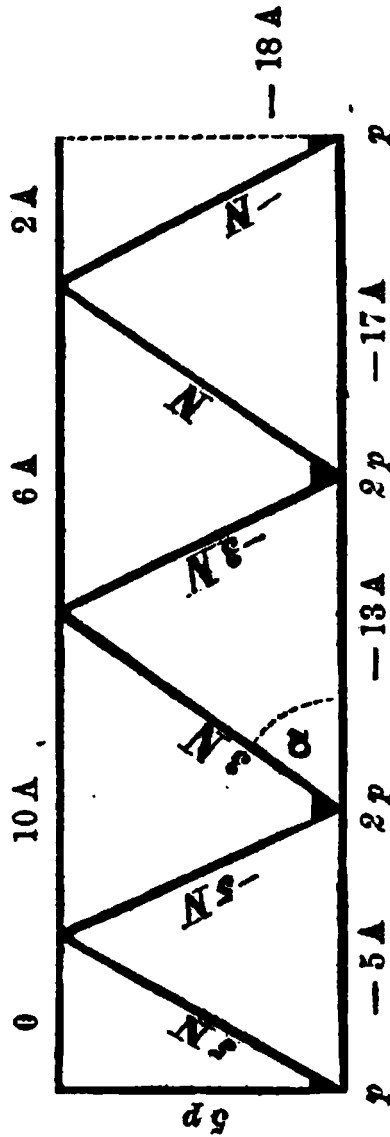
$$p = \frac{ql}{20}.$$

$$A = \frac{1}{50} \frac{ql^2}{8h}.$$

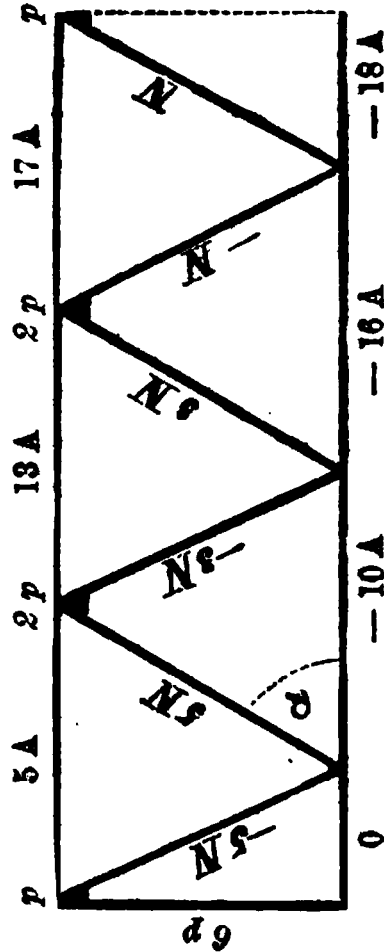
$$N = \frac{A}{\cos \alpha}.$$

Träger-Mitte.

Spannungen in den Stangen eines Trägers.



Untergurtung belastet.



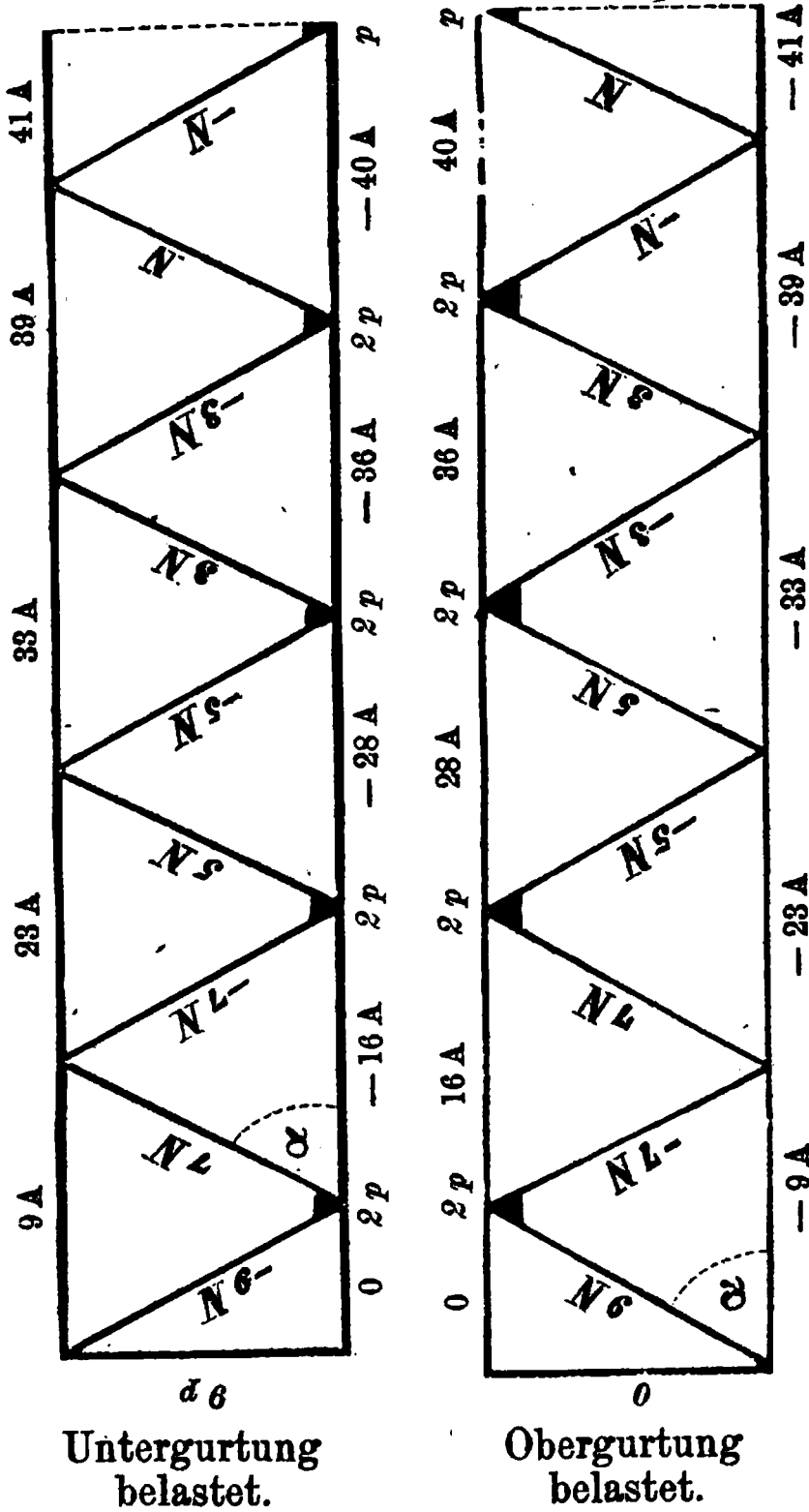
Obergurtung belastet.

Belastung pro Knotenpunkt =  $2p$ .

$A = p \cotang. \alpha$ .  $N = p \operatorname{cosec.} \alpha$ .

Träger - Mitte.

Spannungen in den Stangen eines Trägers.



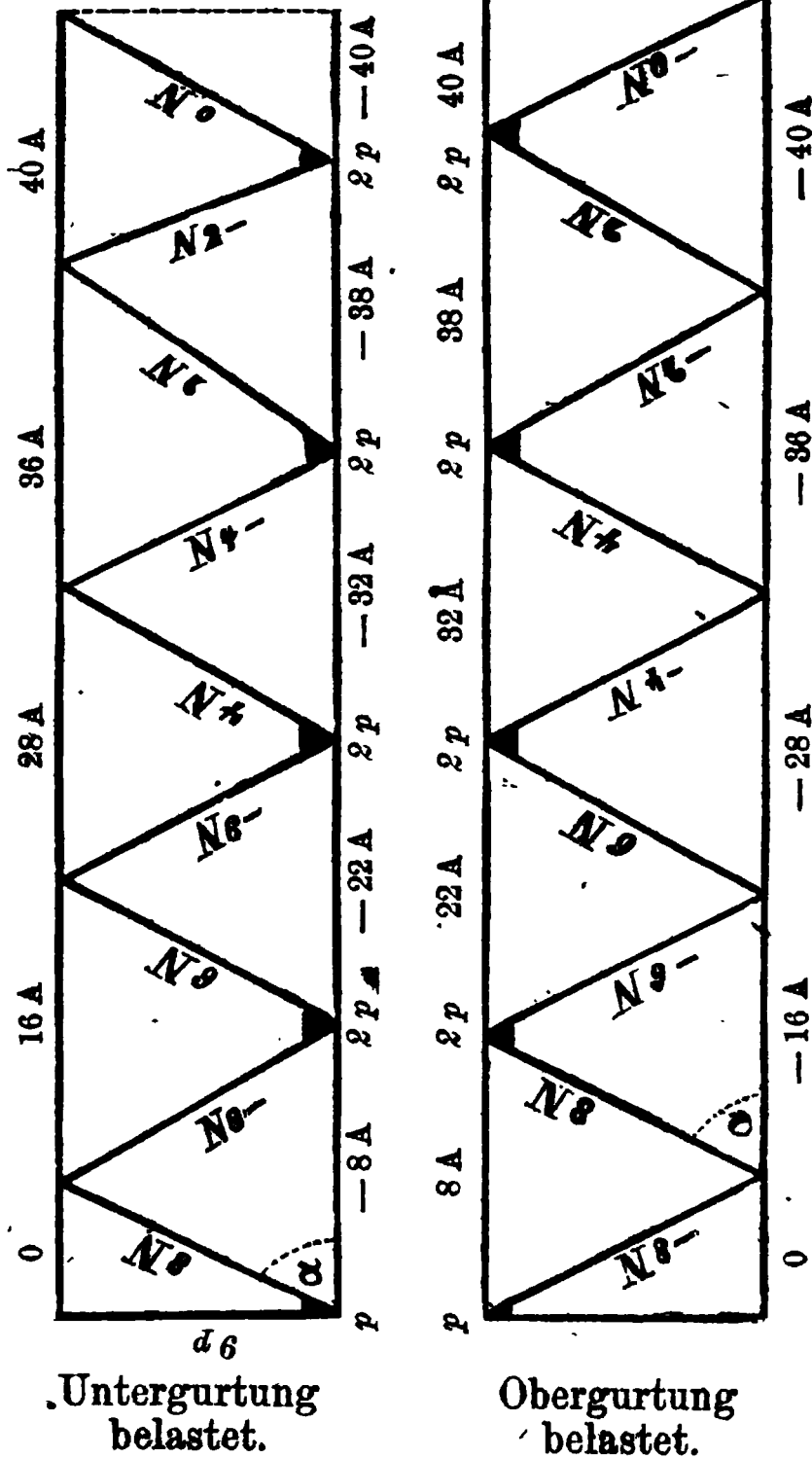
Belastung pro Knotenpunkt =  $2p$ .

$A = p \cot. \alpha$        $N = p \operatorname{cosec.} \alpha$ .



## Träger-Mitte,

Spannungen in den Stangen eines Trägers.

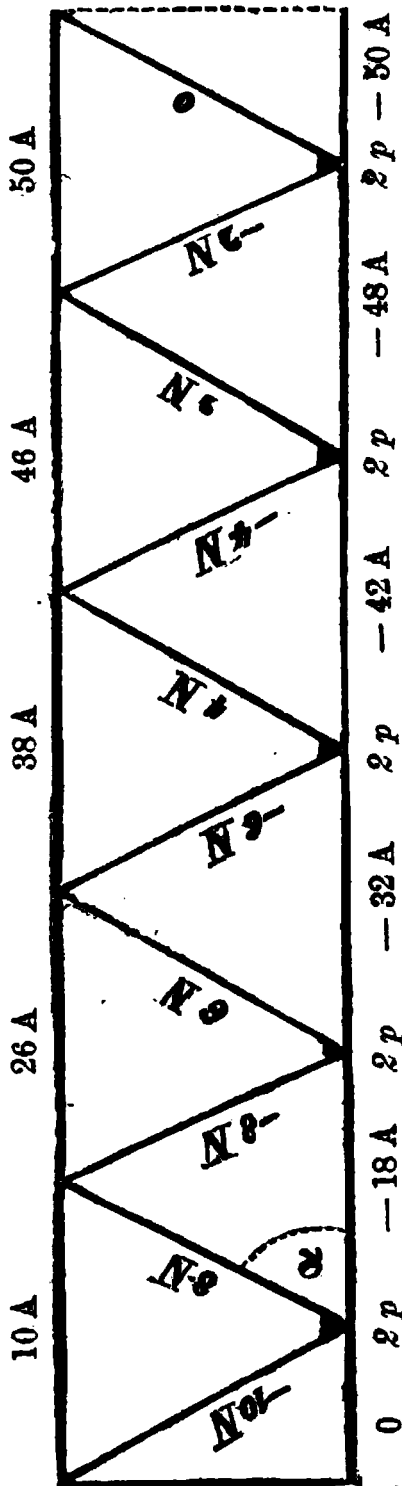


Belastung pro Knotenpunkt = 2 p.

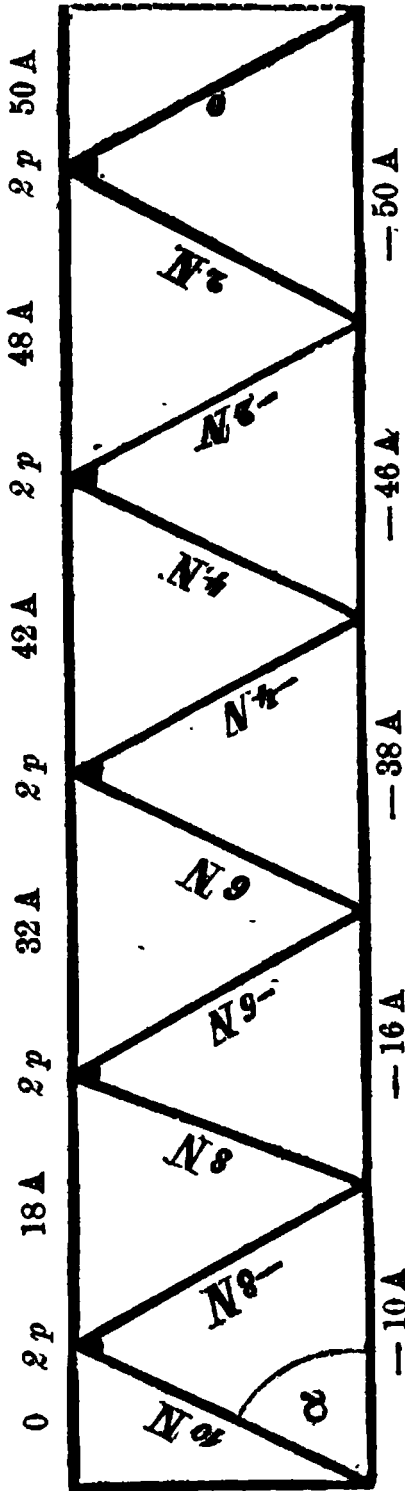
 $A = p \cot. \alpha$        $N = p \operatorname{cosec.} \alpha$

Träger-Mitte.

Spannungen in den Stangen eines Trägers.



Untergurtung belastet.



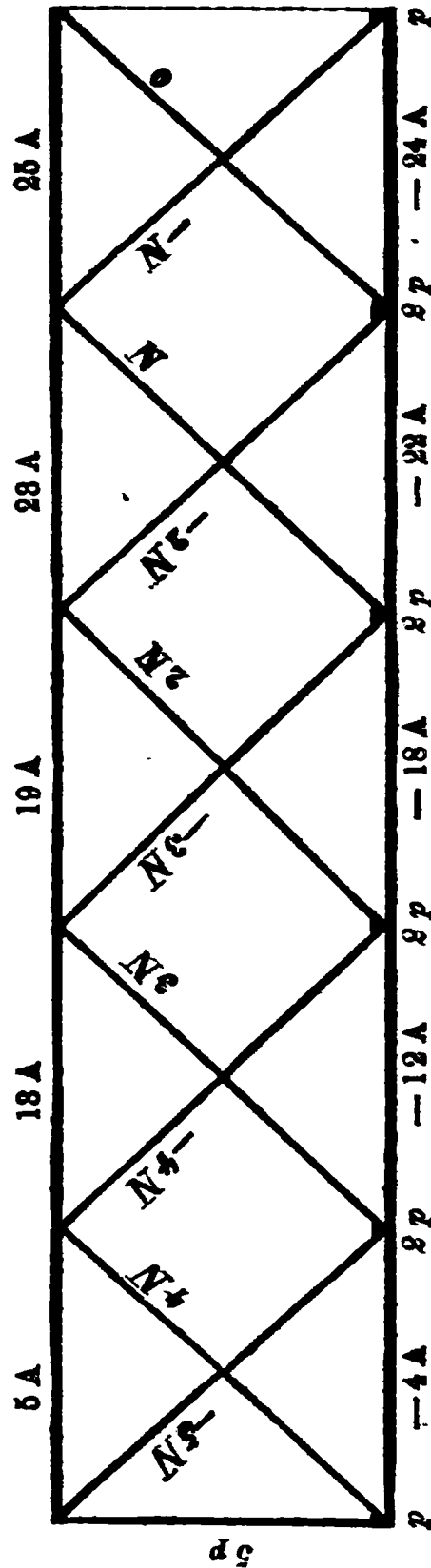
Obergurtung belastet.

Belastung pro Knotenpunkt =  $2 p$ .

$A = p \cot. \alpha$ .  $N = p \operatorname{cosec.} \alpha$ .

Untergurtung belastet.  
Träger-Mitte.

Spannungen in den Stangen eines Trägers.



Belastung pro Knotenpunkt =  $2p$

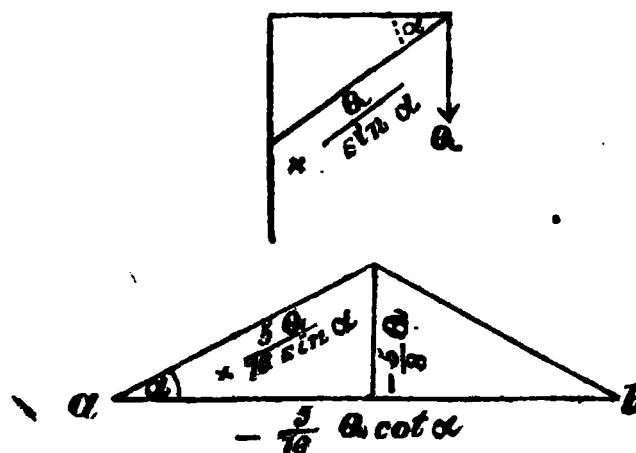
$$A = p \cot. \alpha.$$

$$N = p \operatorname{cosec}. \alpha.$$

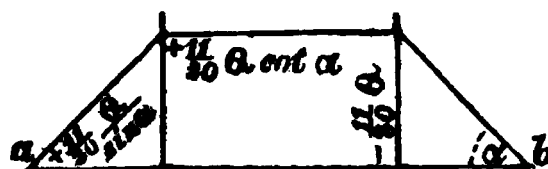
# IV. Konstruktion der Hänge- und Sprengwerke, der eisernen und hölzernen Dachverbände.

## Hänge- und Sprengwerke.

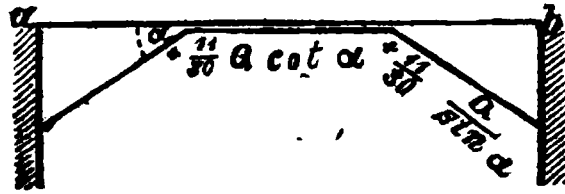
+ bedeutet Druckspannung,  
— bedeutet Zugspannung.



$Q$  bedeutet die gleichmässig auf  $a$   $b$  vertheilte Belastung.

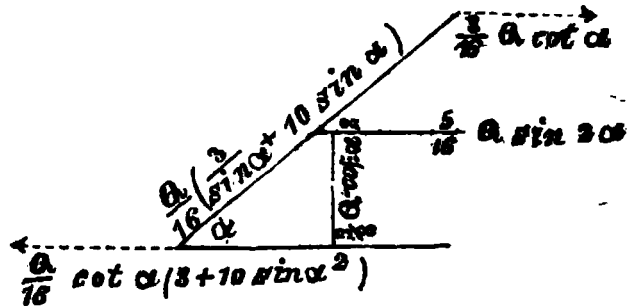


$Q$  bedeutet die gleichmässig über  $a$   $b$  vertheilte Belastung.



Q bedeutet die über a b gleichmässig vertheilte Last.

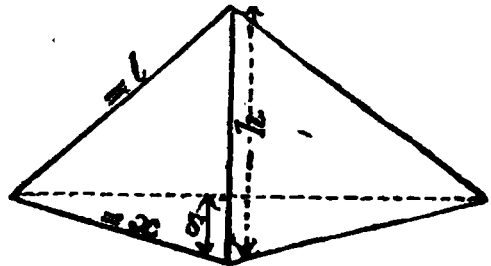
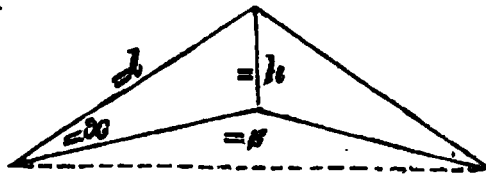
Halber Dachstuhl.



Q bedeutet die Belastung des halben Binders.

### Dächer von Eisen, resp. Holz und Eisen.

Q Belastung eines Sparrens,  
 + bedeutet Druckspannung,  
 - bedeutet Zugspannung.



Spannung in:

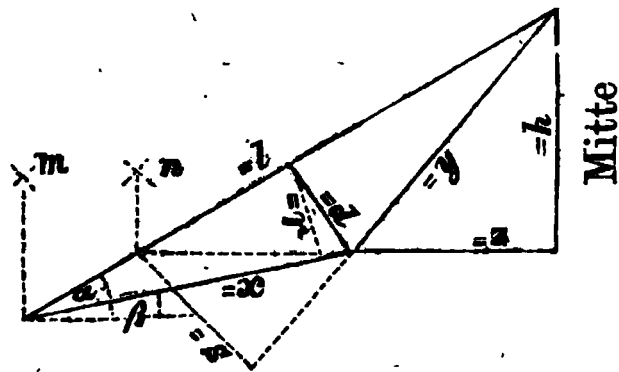
$$x = - \frac{Q x}{2 h},$$

$$l = + \frac{Q l}{2 h},$$

$$h = \pm \frac{Q s}{h}.$$

Für  $s = 0$ , ist statt  $h$  ein Hängeeisen von 1,5 Ctm. Stärke anzuwenden.

Das System ist anwendbar bis zu 8 Meter Spannweite.



$r \perp x,$   
 $s \perp y,$   
 $b = \text{halbe Dachbreite.}$

Spannung in:

$$x = -\frac{13}{32} \frac{Q b}{r} = \Delta,$$

$$y = -\frac{1}{16} \frac{Q (13 m + 10 n)}{s},$$

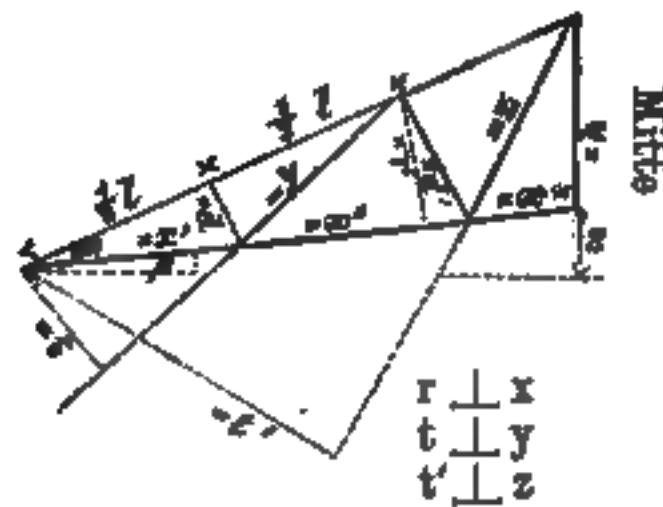
$$z = -\frac{1}{2} \frac{Q b}{h},$$

$$d = +\frac{5}{8} \frac{Q b}{l},$$

$$\text{unten in } l = + \Delta \frac{\cos. \beta}{\cos. \alpha}.$$

Hängeseilen h, falls erforderlich 1,5 Ctm. stark.

Das System ist anwendbar bis 15 Meter Spannweite.



nnung in:

$$x' = - \frac{26}{45} \cdot \frac{Qb}{r} = A,$$

$$x'' = - \frac{41}{90} \cdot \frac{Qb}{r},$$

$$x''' = - \frac{1}{3} \cdot \frac{Qb}{r},$$

$$y = - \frac{11}{90} \cdot \frac{Qb}{t},$$

$$z = - \frac{11}{90} \cdot \frac{Qb}{t'},$$

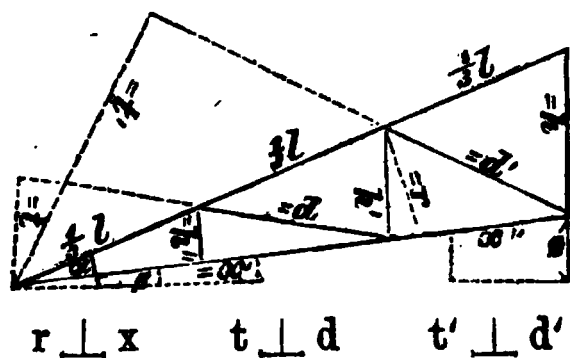
$$d = + \frac{11}{90} \cdot \frac{Qb}{l},$$

$$d' = + \frac{11}{90} \cdot \frac{Qb}{l},$$

$$h = - \frac{0s}{h},$$

$$\text{unten in } l = + A \frac{\cos. \beta}{\cos. \alpha}.$$

20 Meter Spannweite brauchbar.



Spannung in:

$$x' = - \frac{26}{45} \cdot \frac{Q b}{r} = \Delta,$$

$$x'' = - \frac{41}{90} \cdot \frac{Q b}{r},$$

$h''$  als Hängeeisen = 1,5 Ctm.,

$$h' = - \frac{11}{60} \cdot Q,$$

$$h = - \frac{1}{15} \cdot \frac{Q (11h + 15s)}{h},$$

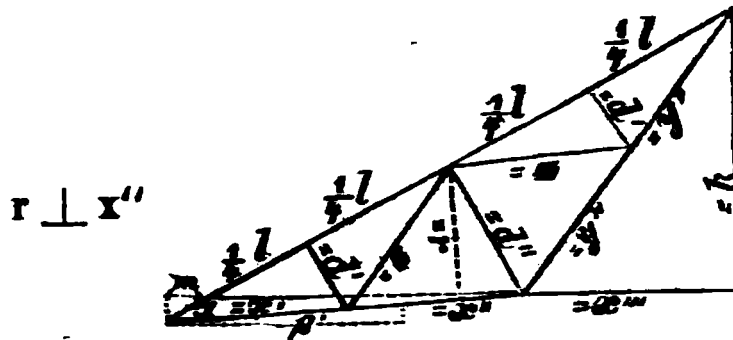
$$d = + \frac{11}{90} \cdot \frac{Q b}{t},$$

$$d' = + \frac{11}{80} \cdot \frac{Q b}{t'},$$

$$\text{unten in } l = + \Delta \cdot \frac{\cos. \beta}{\cos. \alpha}.$$

Das System ist bis 20 Meter Spannweite anwendbar.





Spannung in:

$$x' = -0,450 \cdot \frac{Q b}{r} = \Delta,$$

$$x'' = -0,379 \cdot \frac{Q b}{r},$$

$$x''' = -\frac{Q b}{2 h},$$

$$z = -0,071 \cdot \frac{Q b}{r},$$

$$y' = -\frac{Q b (0,2 b + 0,05 m)}{r (b - m)},$$

$$y'' = -\frac{Q b (0,129 b + 0,121 m)}{r (b - m)},$$

$$d' = +0,285 \cdot \frac{Q b}{l},$$

$$d'' = +0,514 \cdot \frac{Q b}{l},$$

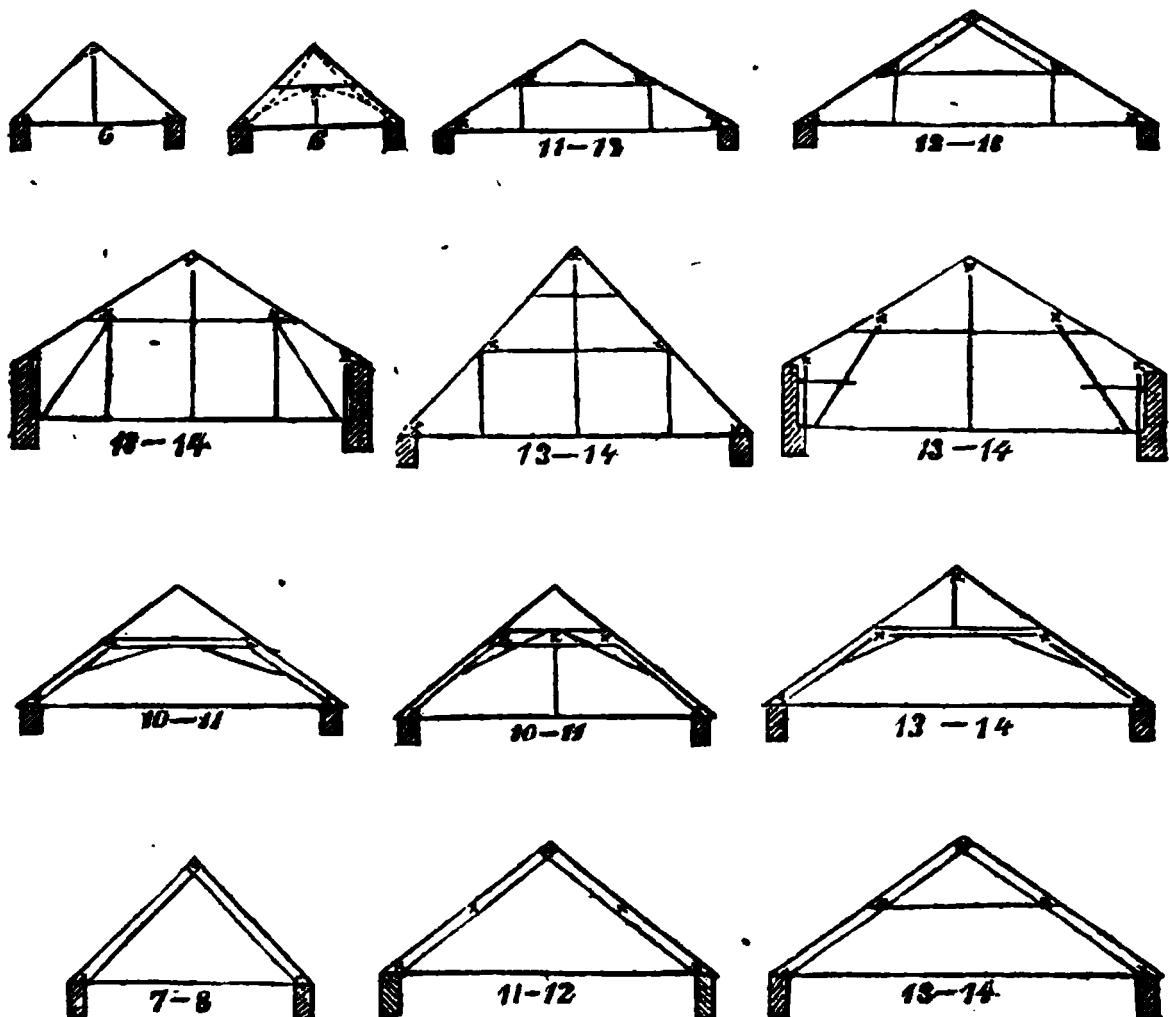
$$\text{unten in } l = + \Delta \cdot \frac{\cos. \beta}{\cos. \alpha}.$$

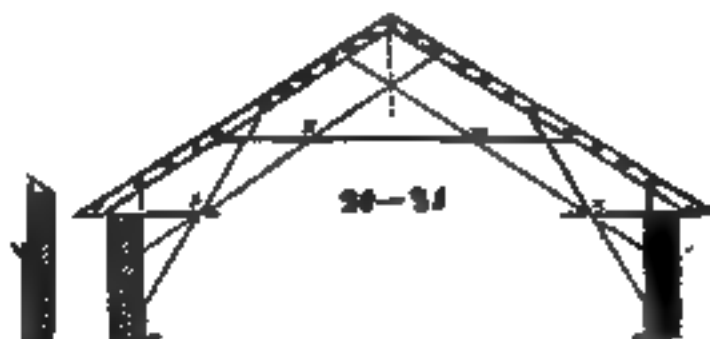
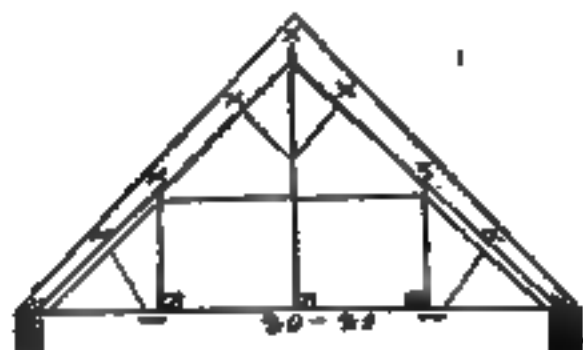
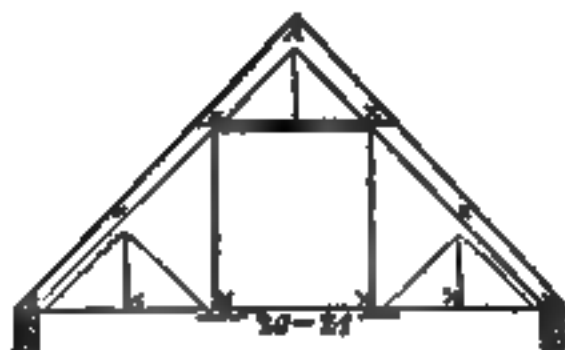
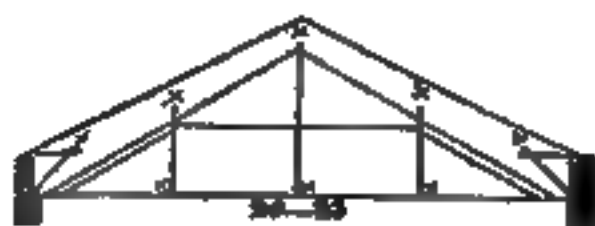
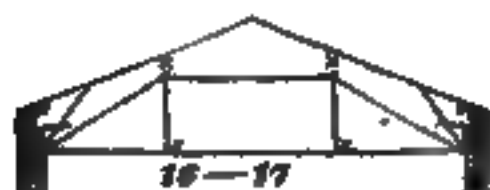
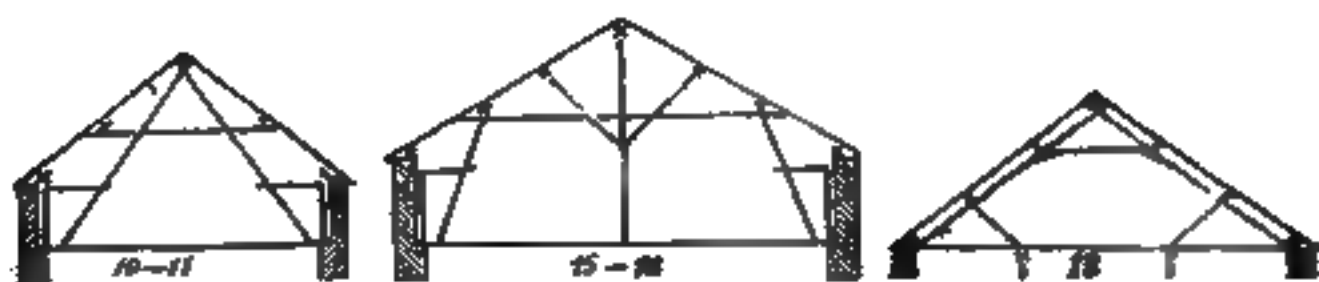
Hängeisen  $h = 1,5 - 2$  Ctm.

Anwendbar bis 25 Meter Spannweite.

Die gezogenen Stangen berechne man mit 1600 Pfd. pro □Ctm. nach den Regeln für gezogene Verbandstücke, die gedrückten dagegen als Streben.

Hölzerne Dächer konstruiere man für verschiedene Spannweiten nach dem beigefügten Schema, worin die Spannweiten im Metermaass angegeben sind.





## V. Konstruktion der Mäuern und Gewölbe.

### Mauerwerk.

#### 1. Zulässige Belastung:

in Fundamenten . . . 100—150000 Pfd. pro □ Met.  
in steigendem Mauerwerk 30—60000 „ „ „

#### 2. Druck des Gebäudes auf den Baugrund:

pro 1 Cub.-Met. Mauerwerk 3200 Pfd.

„ 1 □ Met. Decke . . . 1000 „

„ 1 „ Gewölbe . . 1500 „

#### 3. Mauerstärken.

Bedeutet:

t die Gebäudetiefe,

$h_1$   $h_2$   $h_3$  die Stockwerkshöhen von oben gerechnet.

$s_1$   $s_2$   $s_3$  die entsprechenden Mauerstärken,

so ist:

$$s_1 = \frac{t}{40} + \frac{h_1}{25},$$

$$s_2 = \frac{t}{40} + \frac{h_1 + h_2}{25},$$

$$s_3 = \frac{t}{40} + \frac{h_1 + h_2 + h_3}{25}$$

u. s. w.

Freistehende Mauern erhalten mindestens  $\frac{1}{12}$  bis  $\frac{1}{1}$  ihrer Höhe zur Stärke.

#### 4. Futtermauern.

Bedeutet:  $h$  die Höhe der Mauer,

$b$  „ obere Dicke,

$B$  „ untere Dicke,

$\alpha$  „ den Neigungs- $\angle$  der Böschung,

so hat man:

|                     |               |               |               |                |                |                |       |
|---------------------|---------------|---------------|---------------|----------------|----------------|----------------|-------|
| für $\tan \alpha =$ | $\frac{1}{5}$ | $\frac{1}{6}$ | $\frac{1}{8}$ | $\frac{1}{10}$ | $\frac{1}{12}$ | $\frac{1}{20}$ | 0     |
| $\frac{B}{h} =$     | 0,308         | 0,301         | 0,294         | 0,291          | 0,289          | 0,286          | 0,285 |
| $\frac{b}{h} =$     | 0,108         | 0,135         | 0,169         | 0,191          | 0,206          | 0,236          | 0,285 |

Nach einer praktischen Regel gibt man einer Futtermauer oben 0,5 bis 1 Meter, unten  $\frac{1}{3}$  der Höhe zur Stärke.

Bei Erschütterungen gibt man den Futtermauern unten eine grössere Stärke, man pflegt die angegebene untere Stärke dann in der Mitte zu nehmen.

#### 5. Gewölbestärken (allgemeine Regeln).

Bezeichnet:

$s$  die Gewölbestärke im Schlussstein in Metern,

$l$  die Spannweite in Metern,

so nehme man:

a) Bei Anwendung von Ziegeln:

$\alpha$ . Für halbkreisförmige Gewölbe:

wenn sie im Scheitel horizontal abgeglichen sind,

$$s = \frac{1}{48} l,$$

wenn sie bis zur halben Höhe hintermauert und im Rücken parallel der Leibung abgeglichen sind,  $s = \frac{1}{36} l$ ,

wenn sie bis zur halben Höhe hintermauert und von hier bis zum Scheitel verjüngt abgeglichen sind,  $s = \frac{1}{48} l$  (am Widerl.  $s = \frac{1}{32} l$ ).

$\beta$ . Für flache Gewölbe:  $s = 0,0694 r + 0,314$ ,  
wenn  $r$  den Krümmungshalbmesser am Scheitel  
in Metern bezeichnet.

b) Bei Anwendung von Bruchsteinen nehme man 1,6  
der Gewölbestärken aus Ziegelsteinen.

c) Bei Anwendung von Schnittsteinen, unter der Vor-  
aussetzung, dass das Gewölbe am Widerlager doppelt so  
stark als am Schlussstein ist:

$\alpha$ . Bei starken Brückengewölben  $s = 0,314 + \frac{1}{24} l$ .

$\beta$ . Bei mittelstarken Gewölben  $s = 0,157 + \frac{1}{48} l$ .

$\gamma$ . Bei unbelasteten Gewölben  $s = 0,078 + \frac{1}{96} l$ .

## 6. Widerlagsstärken.

Als ungefähren Anhalt kann man die Widerlagsstärke  
annehmen:

|                                      |                                         |                      |
|--------------------------------------|-----------------------------------------|----------------------|
| bei halbkreisförmigen Bögen . . .    | $\frac{1}{5} - \frac{1}{5^{1/2}}$       | } der lichten Weite. |
| bei halbkreisförmigen Gewölben . .   | $\frac{1}{5^{1/2}} - \frac{1}{6}$       |                      |
| bei flachen Bögen . . . . .          | $\frac{1}{3^{1/2}} - \frac{1}{4^{1/2}}$ |                      |
| bei flachen Gewölben . . . . .       | $\frac{1}{3^{1/2}} - \frac{1}{5}$       |                      |
| bei scheinrechten Bögen und Gewölben | $\frac{1}{3} - \frac{1}{4}$             |                      |

## 7. Das Tonnengewölbe.

Schlusssteinstärke bei 6 Meter Spannweite und darunter  
 $\frac{1}{2}$  Stein, darüber 1 Stein. Alle 2—3 Meter ist ein  
Gurtbogen anzulegen.

Widerlagsstärke wie ad 6.

## 8. Das Kappengewölbe.

Breite der Gurtbögen  $1\frac{1}{2}$  bis 2 Steine.  
Schlusssteinstärke derselben bei  $\frac{1}{4}$  Pfeilhöhe:

|         |                        |                             |
|---------|------------------------|-----------------------------|
|         | bis 2 Meter Spannweite | 1 bis $1\frac{1}{2}$ Stein, |
| von 2 „ | 3,5 „                  | „ $1\frac{1}{2}$ „ 2 „      |
| „ 3,5 „ | 6,0 „                  | „ 2 „ $2\frac{1}{2}$ „      |
| „ 6,0 „ | 9,0 „                  | „ $2\frac{1}{2}$ „ 3 „      |

Gurtbögen, die ausser den Kappen keine weitere Belastung zu tragen haben, können  $\frac{1}{8}$  der Spannweite zum Pfeil erhalten.

Schlusssteinstärke der Kappen bei  $\frac{1}{8}$  bis  $\frac{1}{12}$  Pfeilhöhe:  
 bis 4 Meter . . .  $\frac{1}{2}$  Stein,  
 „ 5,5 „ . . . 1 „

Widerlagsstärke für die Gurtbögen =  $\frac{1}{3}$  —  $\frac{1}{5}$  der Spannweite, je nach der Belastung. Widerlagsstärke für die Kappen =  $\frac{1}{4}$  —  $\frac{1}{5}$  der Spannweite, jedoch nicht unter  $1\frac{1}{2}$  Stein.

## 8. Das Kreuzgewölbe.

Bei einer Spannweite bis zu 7 Meter:

Gewölbstärke der Kappen =  $\frac{1}{2}$  Stein,  
 „ der Grate = 1 „

Bei einer Spannweite von 7—10 Meter:

Gewölbstärke im Scheitel . .  $\frac{1}{2}$  Stein  
 „ am Kämpfer . . 1 „  
 Stärke der Grate im Scheitel . 1 „  
 „ „ „ am Kämpfer  $1\frac{1}{2}$  „

Bei einer Spannweite von 10—20 Meter:

Gewölbstärke im Scheitel . . 1 Stein,  
 „ am Kämpfer . .  $1\frac{1}{2}$  „  
 Stärke der Grate im Scheitel .  $1\frac{1}{2}$  „  
 „ „ „ am Kämpfer 2 „

Stich der Kappen  $\frac{1}{20}$  bis  $\frac{1}{30}$  ihrer Länge.

Die Widerlagsstärke beträgt:

bei halbkreisförmigen Gewölben  $\frac{1}{4}$  —  $\frac{1}{6}$  } der Dia-  
 bei spitzbogenförmigen „  $\frac{1}{5}$  —  $\frac{1}{7}$  } gonale.

Bei Widerlagern, die höher als 3 Meter sind, ist die Stärke um  $\frac{1}{8}$  —  $\frac{1}{10}$  der Höhe zu vergrössern.

## 9. Das Klostergewölbe.

Gewölbstärke

bis 4 Meter Spannweite =  $\frac{1}{2}$  Stein,

„ 4—6 „ „ = 1 „

Widerlagsstärke, bei rechtwinkliger unregelmässiger Grundform wie ad 7. Bei regelmässigen Polygonen  $\frac{2}{3}$  der Werthe ad 7.

## 10. Das Böhmisches Kappen- und Spiegelgewölbe.

Pfeilhöhe =  $\frac{1}{10}$  der Diagonale,

Spannweite bis 5,5 Meter,

Gewölbstärke =  $\frac{1}{2}$  Stein,

Widerlagsstärke =  $\frac{1}{4}$ — $\frac{1}{5}$  der Spannweite, jedoch nicht unter  $2\frac{1}{2}$  Stein.

## 11. Kuppelgewölbe.

Gewölbstärke:

|                        |      |   |   | im Schluss          | am Kämpfer          |
|------------------------|------|---|---|---------------------|---------------------|
| bis 4 Meter Spannweite |      |   |   | $\frac{1}{2}$ Stein | $\frac{1}{2}$ Stein |
| von 4 „                | 6 „  | „ | „ | 1 „                 | 1 „                 |
| „ 6 „                  | 8 „  | „ | „ | 1 „                 | $1\frac{1}{2}$ „    |
| „ 8 „                  | 10 „ | „ | „ | $1\frac{1}{2}$ „    | 2 „                 |

Widerlager  $\frac{1}{6}$ — $\frac{1}{8}$  vom Durchmesser.

## 12. Unterwölbung der Treppen.

a) Tonnen- oder Kappengewölbe:

Pfeilhöhe =  $\frac{1}{8}$ — $\frac{1}{12}$  der Spannweite;

Gewölbstärke im Scheitel bei 2 Meter Spannweite =  $\frac{1}{2}$  Stein, darüber 1 Stein;

Widerlager =  $\frac{1}{3}$  der Spannweite und nicht unter  $1\frac{1}{2}$  Stein.

b) Kreuzgewölbe:

Stärke der Kappen =  $\frac{1}{2}$  Stein;

„ der Grate bis 2 Meter = 1 Stein, darüber  $1\frac{1}{2}$  Stein;

Widerlagsstärke =  $\frac{1}{4}$ — $\frac{1}{5}$  der Diagonalhöhe.

Widerlage sind wie ad 8 zu verstärken.



### 13. Ausrüstung der Gewölbe.

Bögen und Gewölbe in Kalkmörtel nach 2—3 Wochen,  
in Cementmörtel nach 3—4 Tagen.

Die Senkung  $s$  nach dem Ausrüsten beträgt, wenn  $W$   
die Spannweite und  $h$  die Pfeilhöhe bedeutet,  
bei hängendem Lehrgerüste:

$$s = 0,01 \text{ bis } 0,02 (W - h);$$

bei stehendem Lehrgerüste:

$$s = 0,005 \text{ bis } 0,01 (W - h).$$

---

## VI. Konstruktion der einfachen Maschinenteile, der hydraulischen Motoren, Dampfmaschinen, Pumpen, Gebläse und Dampfhämmer.

### A. Torsions-Festigkeit.

Es bezeichne:

P die auf Torsion wirkende Kraft in Kilogr.,

R den Hebelarm, an dem P wirkt, in Metern,

r " " " " " " in Centim.,

N die Anzahl der zu übertragenden Pferdekkräfte,

n die Anzahl der Umdrehungen pro Minute,

d den Durchmesser der auf Torsion beanspruchten Welle  
in Centim.,

a und b die Seiten des Querschnittes eines auf Torsion  
in Anspruch genommenen Körpers mit recht-  
eckigem Querschnitt in Centim.,

k die zulässige Belastung für Maschinenkonstruktionen,  
so hat man bei einfacher Sicherheit (halber Elastici-  
tätsgrenze)

für den kreisförmigen Querschnitt:

$$P r = \frac{1}{16} \pi k d^3 = \frac{1}{8} k d^3,$$

für den rechteckigen Querschnitt:

$$P r = \frac{1}{6} k a b \sqrt{a^2 + b^2};$$

$$R = 716 \frac{N}{n} \text{ Kilogr.-Meter.}$$

örmigen Querschnitt ergibt sich bei s-  
heit

edeeisen:

$$\sqrt[3]{s P R} = 7,93 \sqrt[3]{s \frac{N}{n}} \text{ Centim.};$$

sen:

$$\sqrt[3]{s P R} = 10,02 \sqrt[3]{s \frac{N}{n}} \text{ Centim.}$$

Sicherheit wendet man in der Praxis

fache Sicherheit für Wellen, die durch  
Thierkräfte bewegt werden.

fache Sicherheit für Wellen, die durch  
bewegt werden.

sfache Sicherheit für Wellen, welche  
sen ausgesetzt sind, oder bei denen das  
in Folge von Schwungmassen bedeutend

### B. Einfache Maschinenteile.

## Schrauben

**Whitworth'sche Schrauben-Skala für Befestigungsschrauben mit dreiseitigem Gewinde.**

| Anzahl<br>der Gewinde                        |       |      |                 |                |                |       |      |                   |                |
|----------------------------------------------|-------|------|-----------------|----------------|----------------|-------|------|-------------------|----------------|
| auf eine<br>Länge<br>gleich<br>dem<br>Drehm. |       |      |                 |                |                |       |      |                   |                |
| auf<br>1 Zoll<br>engl.                       |       |      |                 |                |                |       |      |                   |                |
| $\frac{1}{4}$                                | 0,635 | 0,15 | 5               | 20             | $2\frac{1}{4}$ | 5,715 | 1,75 | 9                 | 4              |
| $\frac{5}{16}$                               | 0,794 | 0,20 | $5\frac{5}{8}$  | 18             | $2\frac{1}{2}$ | 6,350 | 2,00 | 10                | 4              |
| $\frac{3}{8}$                                | 0,952 | 0,25 | 6               | 16             | $2\frac{3}{4}$ | 6,985 | 2,18 | $9\frac{5}{8}$    | $3\frac{1}{8}$ |
| $\frac{7}{16}$                               | 1,111 | 0,29 | $6\frac{1}{8}$  | 14             | 3              | 7,620 | 2,42 | $10\frac{1}{2}$   | $3\frac{1}{2}$ |
| $\frac{1}{2}$                                | 1,270 | 0,33 | 6               | 12             | $3\frac{1}{4}$ | 8,255 | 2,63 | $10\frac{9}{16}$  | $3\frac{1}{4}$ |
| $\frac{5}{8}$                                | 1,587 | 0,44 | $6\frac{7}{8}$  | 11             | $3\frac{1}{2}$ | 8,890 | 2,88 | $11\frac{3}{8}$   | $3\frac{1}{4}$ |
| $\frac{3}{4}$                                | 1,905 | 0,55 | $7\frac{1}{2}$  | 10             | $3\frac{3}{4}$ | 9,525 | 3,08 | $11\frac{1}{4}$   | 3              |
| $\frac{7}{8}$                                | 2,222 | 0,65 | $7\frac{7}{8}$  | 9              | 4              | 10,16 | 3,33 | 12                | 3              |
| 1                                            | 2,540 | 0,75 | 8               | 8              | $4\frac{1}{4}$ | 10,79 | 3,55 | $12\frac{7}{8}$   | $2\frac{7}{8}$ |
| $1\frac{1}{8}$                               | 2,857 | 0,84 | $7\frac{7}{8}$  | 7              | $4\frac{1}{2}$ | 11,43 | 3,80 | $12\frac{15}{16}$ | $2\frac{7}{8}$ |
| $1\frac{1}{4}$                               | 3,175 | 0,96 | $8\frac{3}{4}$  | 7              | $4\frac{3}{4}$ | 12,06 | 4,03 | $13\frac{1}{16}$  | $2\frac{3}{4}$ |
| $1\frac{3}{8}$                               | 3,492 | 1,04 | $8\frac{1}{2}$  | 6              | 5              | 12,70 | 4,27 | $13\frac{5}{8}$   | $2\frac{3}{4}$ |
| $1\frac{1}{2}$                               | 3,810 | 1,17 | 9               | 6              | $5\frac{1}{4}$ | 13,33 | 4,58 | $13\frac{25}{32}$ | $2\frac{5}{8}$ |
| $1\frac{5}{8}$                               | 4,127 | 1,20 | $8\frac{1}{8}$  | 5              | $5\frac{1}{2}$ | 13,97 | 4,73 | $14\frac{7}{16}$  | $2\frac{5}{8}$ |
| $1\frac{3}{4}$                               | 4,445 | 1,35 | $8\frac{3}{4}$  | 5              | $5\frac{3}{4}$ | 14,60 | 4,95 | $14\frac{3}{8}$   | $2\frac{1}{2}$ |
| $1\frac{7}{8}$                               | 4,762 | 1,44 | $8\frac{7}{16}$ | $4\frac{1}{2}$ | 6              | 15,24 | 5,20 | 15                | $2\frac{1}{2}$ |
| 2                                            | 5,080 | 1,66 | 9               | $4\frac{1}{2}$ |                |       |      |                   |                |

Für Schrauben mit flachgängigem Gewinde nehme man die Anzahl der Gewinde halb so gross als für Schrauben mit dreiseitigem Gewinde.

## Schrauben-Skala für Schrauben zu mechanischen und optischen Instrumenten.

| Durchmesser<br>der Schrauben.<br>Millim. | Anzahl der Gänge auf 1 Centim. |                     |
|------------------------------------------|--------------------------------|---------------------|
|                                          | für grobes Gewinde.            | für feines Gewinde. |
| 4                                        | 12                             | 24                  |
| 5                                        | 10                             | 20                  |
| 6                                        | 9                              | 18                  |
| 8                                        | 8                              | 16                  |
| 10                                       | 6                              | 12                  |

Die zulässige Belastung eines Schraubenbolzens vom Durchmesser  $d$  betrage:

$$P = 220 d^2 \text{ Kilogr. (wenn } d \text{ in Centim.)}$$

Der zum Anziehen einer Schraubenmutter an der Peripherie des Schraubenbolzens wirksame Druck ist circa halb so gross als die hervorgebrachte Spannung im Schraubenbolzen.

### Zapfenlager.

Für gewöhnliche Zapfenlager sind folgende Verhältnisse passend:

Durchmesser des Zapfens  $= d$ ; Länge desselben  $= 1\frac{1}{2} d$ ;

Metallstärke der Pfannen  $= 0.1 d$ , im Min.  $= 0.3 \text{ Ctm.}$ ;

Höhe des Mittelpunktes über der Sohle  $= \frac{5}{4} d$ ;

Stärke des Lagerdeckels  $= \frac{3}{4} d$  bis  $d$ .

Anzahl der Deckelschrauben:

bis 10 Centim. Durchm.  $= 2$  Stück à  $\frac{1}{3} d$ ;

darüber  $= 4$  Stück à  $\frac{1}{4} d$ .

Entfernung der Deckelschrauben von M. zu M.  $1\frac{5}{6} d$   
bis  $2 d$ .

**Wellen, Zapfen und Naben.**

Wellen, die auf Torsion in Anspruch genommen werden, bestimme man nach A.

Tabelle über die übliche Länge von Zapfen mit dem Durchmesser d.

| Anzahl der Umdrehungen: | bis 100.         | 100—250.               | 250—500.    | über 500. |
|-------------------------|------------------|------------------------|-------------|-----------|
| Länge der Zapfen:       | $1\frac{1}{2} d$ | $1\frac{1}{2} d - 2 d$ | $2 d - 3 d$ | $3 d$     |

Tabelle über die zulässige Belastung von Zapfen, welche auf Abbrechen in Anspruch genommen werden, pro Quadr.-Centim. Querschnitt.

| Material.     | Bei einer Länge von:    |                         |                         |                         |
|---------------|-------------------------|-------------------------|-------------------------|-------------------------|
|               | $1\frac{1}{2} d$        | $2 d$                   | $2\frac{1}{2} d$        | $3 d$                   |
|               | Kilogr.<br>pro Qu.-Ctm. | Kilogr.<br>pro Qu.-Ctm. | Kilogr.<br>pro Qu.-Ctm. | Kilogr.<br>pro Qu.-Ctm. |
| Gussstahl . . | 110                     | 82                      | 66                      | 55                      |
| Schmiedeeisen | 61                      | 46                      | 37                      | 30                      |
| Gusseisen . . | 43                      | 32                      | 26                      | 21                      |

Kann man die Belastung des Zapfens als gleichmässig vertheilt annehmen, wie man Solches bei Kurbelwarzen anzunehmen pflegt, so sind die Angaben über zulässige Belastung in der obigen Tabelle zu verdoppeln.

Die Tragfähigkeit der Zapfen von gleichem Durchmesser verhält sich umgekehrt wie deren Länge.

Stützzapfen gebe man, wenn die eine der reibenden Flächen aus Bronze besteht,  $\frac{3}{4}$ , wenn die reibenden Flächen Stahl sind,  $\frac{1}{2}$ , von dem Durchmesser eines schmiedeeisernen Zapfens, der durch dieselbe Last auf Bruch in Anspruch genommen wird, und dessen Länge der Anzahl der Umdrehungen entspricht.

Naben gibt man gewöhnlich folgende Verhältnisse:

- a) Durchmesser der Nabe, wenn Nabe und Welle aus demselben Material sind  $= 1\frac{3}{4} d$  bis  $2 d$ .

Wenn die Welle aus Schmiedeeisen, die Nabe aus Gusseisen  $= 2 d$  bis  $2\frac{1}{2} d$ .

- b) Länge der Nabe gewöhnlich  $= 1\frac{1}{4} d$  bis  $1\frac{1}{2} d$ .  
Für Naben, die einer besonders soliden Befestigung bedürfen, wie Schwungradnaben  $= 2 d$  bis  $3 d$ .

Naben, welche nur einen Theil der Torsionskraft der Welle übertragen, können entsprechend schwächer werden.

Federn und Keile für passend gebohrte Naben:

Breite  $= \frac{1}{5}$  bis  $\frac{1}{3} d$ , Stärke  $= \frac{5}{8}$  der Breite.

#### Riemscheiben und Bremsen.

Bezeichnet

P den auf den Umfang der Riemscheibe oder Bremscheibe reducirten Druck,

T die grössere, t die kleinere Spannung des Riemens.

so ist:  $T = P + t$ ;  $t = T - P$ .

Einen 4,4 Millim. dicken Riemen kann man pro Centim. Breite mit 11,5 Kilogr. belasten.

Unter gewöhnlichen Verhältnissen pflegt man pro Centim. Riemenbreite 5 bis 6 Kilogr. zu übertragen.

#### Zahnräder.

- 1) Verhältnisse der Zähne:

Bezeichnet s die Zahnstärke auf dem Theilkreise gemessen, so pflegt man folgende Verhältnisse anzunehmen:

Theilung des Zahnes  $= 2,1 s$ .

Höhe resp. Länge des Zahnes  $= 1,2 s$ , im Maximum  $= 1,5 s$ .

Verhältniss zwischen Höhe des Zahnkopfes und Zahnwurzel  $= \frac{5}{7} s$ .

Breite des Zahnes: Gewöhnlich 4 s bis 5 s.

Bei starkem Gebrauch = 5 s bis 6 s.

Bei sehr schnell gehenden Rädern, zur Vermeidung der Abnutzung. = 6 s bis 8 s.

Für die Theilung wählt man mit Vorthail einfache Bruchtheile oder Vielfache, des  $\pi$ fachen der Maasseinheit.

Der Durchmesser des Rades ist alsdann bei einer Theilung  $n \pi$  und bei  $z$  Zähnen:

$$D = n z.$$

## 2) Stärke der Zähne:

a) Gusseiserne Zahnräder können pro Qu.-Centim. Anhaftungsfläche eines Zahnes eine Kraft übertragen von:

73 Kilogr. pro Qu.-Centim. bei ruhigem und gleichförmigem Gange;

36 Kilogr. pro Qu.-Centim. bei unruhigem Gange;

18 Kilogr. pro Qu.-Centim. bei ungleichförmigem mit Stößen verbundenem Gange, und wenn die zu übertragende Kraft in Folge von Schwungmassen bedeutend anwachsen kann.

b) Zahnräder mit hölzernen Zähnen belastet man mit 15 bis 18 Kilogr. pro Qu.-Centim.

c) Bezeichnet:

$d$  den auf Torsion berechneten Wellendurchmesser in Centim.,

$b$  die Breite des Zahnes in Centim.,

$r$  den Theilungshalbmesser in Centim.,

so nehme man die Anhaftungsfläche eines jeden Zahnes:

Für gusseiserne Räder auf schmiedeeisernen Wellen:

$$s b = \frac{d^3}{r} \text{ Qu.-Centim.};$$

für gusseiserne Räder auf gusseisernen Wellen:

$$s b = 0,7 \frac{d^3}{r} \text{ Qu.-Centim.}$$



3) Die Stärke des Radkranzes wähle man:

bei gusseisernen Rädern =  $\frac{2}{3}$  bis  $\frac{9}{8}$  der Zahnstärke;  
bei Rädern mit hölzernen Kämme =  $\frac{1}{1}$  bis  $\frac{2}{1}$  der Zahnstärke.

#### Schneckenräder.

Bezeichnet

P die an der Schnecke am Hebelsarm a wirkende Kraft,

Q die am Schneckenrade am Hebelsarm b wirkende Kraft,

n die Anzahl der Zähne des Schneckenrades,

so hat man bei einfachem Gewinde theoretisch:

$$P a = \frac{Q b}{n}.$$

Wegen der Reibung kann man unter gewöhnlichen Verhältnissen rechnen:

$$P a = \frac{3 Q b}{n}.$$

#### Kurbeln.

Handkurbeln gibt man folgende Verhältnisse:

Radius der Kurbel = 26 bis 42 Centim.;

Länge des Kurbelgriffs für 1 Arbeiter = 26 bis 32 Centim.;

Länge des Kurbelgriffs für 2 Arbeiter = 47 bis 52 Centim.;

Durchmesser des Kurbelgriffs = 4 bis 5 Centim.;

Höhe der Kurbelwelle über Fussboden bis 1,1 Met.

Ein Mann arbeitet an einer Kurbel mit 20 bis 30 Pfund bei 1 bis 0,6 Meter Geschwindigkeit pro Sekunde.

#### Lenkerstangen.

Länge derselben im Minimum = dem 3fachen, gewöhnlich = dem 5fachen, auch wohl 6fachen Kurbelhalbmesser.

Querschnitt derselben, bei Anspruchnahme auf rückwirkende Festigkeit nach II.

**Balancier.**

Länge eines Balancierarmes mindestens = dem  $1\frac{1}{2}$ -fachen Hube. Höhe in der Mitte gewöhnlich =  $\frac{1}{8}$  bis  $\frac{1}{6}$  der Länge.

**Windetrommel, Seile und Ketten.****1) Verhältnisse der Windetrommeln.**

Bezeichnet  $d$  den Durchmesser des Seiles oder der Kette, so wähle man den Durchmesser der Trommel mindestens:

- a) Für Hanfseile = (6 bis 8)  $d$ , bei starkem Gebrauch, wie bei Grubenbeförderung = (30 bis 50)  $d$ .
- b) Für Drahtseile = (30 bis 40)  $d$ , bei starkem Gebrauch = (100 bis 150)  $d$ .
- c) Für Ketten = (24 bis 30)  $d$ .

**2) Hanfseile.**

- a) Die äusserste Tragfähigkeit:  
für ungetheerte Seile 877 Kilogr. pro Qu.-Centim.;  
für getheerte Seile . 804 „ „ „
- b) Die zulässige Belastung:  
für Flaschenzugseile 110 Kilogr. pro Qu.-Centim.;  
für Kabelseile . . . 132 „ „ „  
für Förderseile . . . 37 „ „ „

**3) Drahtseile.****Zulässige Belastung:**

für Förderseile durchschnittlich 183 Kilogr. pro Qu.-Centim.;  
für Kabelseile durchschnittlich 365 Kilogr. pro Qu.-Centim.

**Allgemeine Regeln für Drahtseiltransmissionen.**

- 1) Durchmesser der Seilscheiben = 150- bis 200-fache Seildicke.
- 2) Umfangsgeschwindigkeit der Seilscheiben = 13 bis 23 Meter.

- 3) Die Anspannung im treibenden Seile rechne man gleich dem doppelten zu überwindenden Widerstande und gleich der doppelten Anspannung im getriebenen Seilende.
- 4) Durchsenkung:  
im treibenden Seile bis ca.  $\frac{1}{2}$  Meter pro 33 Meter Entfernung;  
im getriebenen Seile bis ca. 1 Meter pro 33 Meter Entfernung.
- 5) Die Minimal-Entfernung der Seilrollen-Axen soll nicht unter 8 Meter betragen.

#### Schwungräder.

- 1) Umfangsgeschwindigkeit und Spannung  
im Schwungringe,

Es bezeichne:

$v$  die Umfangsgeschwindigkeit eines Schwungrades in Metern pro Sek.,

$P$  die im Schwungringe pro Qu.-Meter Querschnitt hervorgerufene Spannung in Kilogr.,

$p$  die im Schwungringe pro Qu.-Centim. Querschnitt hervorgerufene Spannung in Kilogr.,

$\gamma$  das Gewicht eines Cub.-Meter des betreffenden Materials in Kilogr.,

$g$  die Endgeschwindigkeit eines freifallenden Körpers nach der ersten Sek. in Metern,

dann hat man:

$$P = \gamma \frac{v^2}{g}.$$

Für gusseiserne Schwungräder:

$$P = 7250 \frac{v^2}{g} \text{ Kilogr. pro Qu.-Meter,}$$

$$p = 0,074 v^2 \text{ Kilogr. pro Qu.-Centim.}$$

Man pflegt die Umfangsgeschwindigkeit der Schwungräder nicht über 31 Meter pro Sek. anzunehmen.

## 2) Der Durchmesser

der Schwungräder ist um so vorteilhafter, je grösser er ist.

Im Minimum sei derselbe = dem 3—4fachen Kolbenhub, im Maximum so gross, dass die Maximal-Umfangsgeschwindigkeit weniger als 34 Meter beträgt.

## 3) Gewicht des Schwungrades.

Bezeichnet

$N$  die Grösse der Maschine in Pferdekraften,

$n$  die Anzahl der Umdrehungen pro Min.,

$v$  die Umfangsgeschwindigkeit des Schwungrades in Metern pro Sek.,

so hat man das Gewicht des Schwungrades:

$$G = \alpha 50 \frac{N}{n v^2} \text{ Kilogr.}$$

Der Werth des Koeffizienten  $\alpha$  ist von der Konstruktion und Wirkungsweise der Dampfmaschinen, sowie von der Art der zu betreibenden Maschine abhängig.

Für doppelt wirkende Dampfmaschinen mit 1 Cylinder wählt man:

- a) Wenn die zu betreibenden Maschinen keine grosse Gleichförmigkeit in der Bewegung erfordern und einen ziemlich gleichmässigen Widerstand äussern, wie Mahlmühlen, Pumpen etc.:

$$\alpha = 5000.$$

Erfolgt der Betrieb aber mittelst Zahnräder, so nehme man mindestens:

$$\alpha = 10000.$$

- b) Wenn die zu betreibenden Maschinen sehr grosse Gleichförmigkeit erfordern, oder mit sehr veränderlichem Widerstande arbeiten:

$$\alpha = 30000.$$

Die letzte Angabe passt gut für Walzenzugmaschinen.

Für Schwungräder der Zwillingsmaschinen genügt unter sonst gleichen Verhältnissen  $\frac{1}{8}$  bis  $\frac{1}{10}$  des Gewichtes der Schwungräder für Maschinen mit 1 Cylinder, wenn nicht der veränderliche Widerstand der zu betreibenden Maschinen ein grösseres Schwungrad bedingt.

Schwungräder, welche zur Ausgleichung des veränderlichen Widerstandes von Arbeitsmaschinen dienen, bringe man den Punkten, wo die Kraftabnahme stattfindet, möglichst nahe.

### Schwungkugel-Regulator.

#### 1) Watt'scher Regulator.

Bezeichnet

L die Länge eines Pendelarms in Metern,

l die Länge der Hülsenstangen in Metern,

$\alpha$  den Winkel, den die Pendelarme mit der Umdrehungsaxe bilden,

P das Gewicht einer Kugel incl. dem halben Gewicht einer Pendelstange in Kilogr.,

Q das Gewicht der Hülse incl. dem auf die Hülse reducirten Gewicht des Stellzeuges,

n die Anzahl der Umdrehungen pro Min.,

dann ist:

$$n = \frac{60}{2\pi} \sqrt{\frac{g}{L \cos. \alpha} \left(1 + \frac{Ql}{PL}\right)};$$

für  $\alpha = 30^\circ$  und wenn  $Q = 0$  hat man:

$$n = 57 \frac{\sqrt{L}}{L} \cdot (n = 32 \frac{\sqrt{L}}{L}, \text{ wenn } L \text{ in Meter}).$$

Gewöhnlich nimmt man L gleich dem Cylinder-Durchmesser der Dampfmaschine und den Durchmesser der Kugel gleich 0,3 L.

Die Umdrehungszahl n kann grösser oder kleiner werden, indem man Q vergrössert oder verkleinert, d. h. die Hülse belastet oder entlastet.

## 2) Verbesserter Watt'scher Regulator.

Bezeichnet

$L$  die Länge eines Pendelarms in Metern,

$a$  den Abstand der Aufhängepunkte von der Umdrehungsaxe,

$\alpha$  den Winkel, den die Pendelarme beim tiefsten Stande der Kugeln mit der Umdrehungsaxe bilden,

dann ist  $a$  so zu wählen, dass die Projektion des Pendelstückes vom Mittelpunkt der Kugel bis Durchschnittspunkt mit der Umdrehungsaxe, auf die Umdrehungsaxe ( $L \cdot \cos. \alpha - a \cotg. \alpha$ ) ein Maximum ist.

Man hat alsdann  $a = L (\sin. \alpha)^2$ .

Für  $\alpha = 30^\circ$  ist  $a = \frac{L}{8}$ , für  $\alpha = 25^\circ$  ist  $a = 0,076 L$ .

## C. Hydraulische Motoren.

### Wasserräder.

1). Bezeichnet

$H$  das Gefälle in Metern,

$Q$  den Wasserzufluss in Cub.-Metern pro Sek.,

so ist die absolute Wasserkraft:

$$\frac{1000 Q H}{75} \text{ Pferdekräfte.}$$

Der Nutzeffekt ist bei guter Konstruktion:

|                                                 |                |
|-------------------------------------------------|----------------|
| für unterschlächtige Räder . . . . .            | 0,30 bis 0,35, |
| „ Kropfräder . . . . .                          | 0,40 „ 0,50,   |
| „ Ponceleträder . . . . .                       | 0,60 „ 0,65,   |
| „ Schaufelräder mit Ueberfall-Einlauf . . . . . | 0,60 „ 0,65,   |
| „ „ mit Koulissen-Einlauf . . . . .             | 0,65 „ 0,70,   |
| „ rückschlächtige Zellenräder . . . . .         | 0,60 „ 0,70,   |

für overschlächlige Räder mit geringem  
 Gefälle . . . . . 0,50 bis 0,60,  
 „ overschlächlige Räder mit mehr als  
 5 Meter Gefälle . . . . . 0,60 „ 0,70.

2) Die Umfangsgeschwindigkeit pro Sekunde  
 betrage:

für unterschlächtige Räder  $= 1,77 \sqrt{H}$  Meter,  
 „ Kropfräder  $= 2$  Meter,  
 „ Poncelträder  $= 0,55 \sqrt{2 g h} = 2,44 \sqrt{H}$  Meter,  
 „ Schaufelräder mit Ueberfall-Einlauf  $= 1,4$  Meter,  
 „ „ mit Koulissen-Einlauf  $= 1,6$  Meter,  
 „ rückschlächlige und overschlächlige Räder  $= 1,3$  bis  
 1,5 Meter.

3) Der Halbmesser betrage:

für unterschlächtige Räder  $= 2$  bis 3,8 Meter,  
 „ Kropfräder  $= 1,5 H$  bis 2,5 H,  
 „ Poncelträder  $= 2 H$ ,  
 „ Schaufelräder mit Ueberfall-Einlauf  $= 1,25 H$  bis 1,5 H,  
 „ „ mit Koulissen-Einlauf  $= H$ ,  
 „ rückschlächlige Räder  $= \frac{2}{3} H$ ,  
 „ overschlächlige Räder  $= \frac{1}{2} \left( H - 4 \frac{v^2}{2 g} \right)$ .

wenn  $v$  die Umfangsgeschwindigkeit in Metern bezeichnet.

4) Die Füllung oder das Verhältniss zwischen dem  
 Volumen der Wassermasse, welches ein Schaufel-  
 oder Zellenraum aufzunehmen hat und dem Volu-  
 men eines solchen Raumes, betrage:

für Schaufelräder  $= \frac{1}{3}$  bis  $\frac{1}{2}$ ,  
 „ Zellenräder  $= \frac{1}{5}$  bis  $\frac{1}{3}$ .

Bezeichnet

a die radiale Dimension der Zellen in Metern,  
 b die Breite des Rades in Metern,  
 v die Umfangsgeschwindigkeit in Metern pro Sek.,

so beträgt die Füllung  $= \frac{Q}{a b v}$ .

5) Die radiale Dimension der Zellen nimmt man gewöhnlich zwischen folgenden Grenzen:

bei ober- und rückschlächtigen Rädern = 29 bis 31 Centim.,  
 „ Kropfrädern = 31 bis 42 Centim.,  
 „ unterschlächtigen und Poncelet-Rädern = 31 bis 52 Ctm.

### **Turbinen.**

1) Zweckmässige Anwendung:

- a) bei sehr kleinen und bei sehr grossen Gefällen,
- b) bei grosser Geschwindigkeit der zu treibenden Arbeitsmaschinen,
- c) bei veränderlichem Unterwasser.

Für mässige Gefälle eignen sich am besten die Henschel'schen (Jonval'schen) Turbinen. Bei hohen Gefällen und geringen Wassermengen sind die Poncelet'schen Turbinen zu empfehlen.

Zur Erzeugung von veränderlichen Geschwindigkeiten, bei unreinem Wasser, auch bei sehr variablem Gefälle sind Turbinen nicht zu empfehlen.

2) Der Nutzeffekt beträgt bei guter Konstruktion:

- für Stossturbinen 0,30 bis 0,35;
- „ schottische Turbinen 0,50 bis 0,60;
- „ Poncelet'sche Turbinen bei Gefällen von 16 bis 100 Meter im Mittel 0,60;
- „ Fourneyron'sche und Henschel'sche (Jonval'sche) Turbinen 0,70 bis 0,75.



### D. Dampfkessel.

Tabellen über die Wandstärken und Durchmesser für Dampfrohre, Dampfkessel und Dampfcylinder.

a) Schmiedeeiserne Dampfkessel und -Rohre mit innerem Druck.

| Wandstärke<br>in Millim. | Dampf-Ueberdruck in Atmosphären:                |     |     |     |     |     |     |     |     |     |     |     |     |     |
|--------------------------|-------------------------------------------------|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|
|                          | 1                                               | 1½  | 2   | 2½  | 3   | 3½  | 4   | 4½  | 5   | 6   | 7   | 8   | 9   | 10  |
|                          | Grösster zulässiger Durchmesser in Centimetern: |     |     |     |     |     |     |     |     |     |     |     |     |     |
| 4                        | 160                                             | 103 | 79  | 63  | 53  | 45  | 39  | 35  | 31  | 26  | 22  | 20  | 18  | 16  |
| 5                        | 244                                             | 159 | 121 | 96  | 80  | 69  | 60  | 53  | 48  | 40  | 34  | 30  | 27  | 24  |
| 6                        | 330                                             | 215 | 162 | 129 | 107 | 93  | 81  | 72  | 64  | 54  | 46  | 41  | 36  | 32  |
| 7                        | —                                               | 272 | 204 | 163 | 135 | 116 | 101 | 90  | 81  | 68  | 58  | 51  | 45  | 40  |
| 8                        | —                                               | —   | 245 | 196 | 162 | 140 | 122 | 109 | 98  | 82  | 70  | 61  | 54  | 49  |
| 9                        | —                                               | —   | 286 | 230 | 190 | 164 | 143 | 127 | 114 | 95  | 81  | 71  | 63  | 57  |
| 10                       | —                                               | —   | —   | 263 | 217 | 188 | 164 | 145 | 131 | 109 | 93  | 82  | 72  | 65  |
| 11                       | —                                               | —   | —   | —   | 244 | 211 | 184 | 164 | 147 | 123 | 105 | 92  | 81  | 73  |
| 12                       | —                                               | —   | —   | —   | 272 | 235 | 205 | 182 | 164 | 137 | 117 | 102 | 90  | 81  |
| 13                       | —                                               | —   | —   | —   | —   | 259 | 226 | 200 | 181 | 151 | 129 | 112 | 99  | 89  |
| 14                       | —                                               | —   | —   | —   | —   | —   | 247 | 219 | 197 | 165 | 141 | 123 | 108 | 97  |
| 15                       | —                                               | —   | —   | —   | —   | —   | 267 | 237 | 214 | 179 | 153 | 133 | 117 | 105 |
| 16                       | —                                               | —   | —   | —   | —   | —   | —   | 256 | 231 | 193 | 165 | 143 | 126 | 114 |

b) Gussstählerne Dampfkessel und -Rohre mit innerem Druck.

|    |     |     |     |     |     |     |     |     |     |     |     |     |     |     |
|----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|
| 4  | 271 | 179 | 135 | 106 | 89  | 77  | 67  | 59  | 53  | 45  | 38  | 33  | 30  | 27  |
| 5  | —   | 254 | 190 | 150 | 126 | 109 | 95  | 84  | 75  | 63  | 54  | 47  | 42  | 38  |
| 6  | —   | 329 | 245 | 195 | 162 | 140 | 122 | 108 | 97  | 82  | 79  | 61  | 54  | 49  |
| 7  | —   | —   | 300 | 239 | 199 | 172 | 150 | 133 | 119 | 100 | 85  | 74  | 66  | 60  |
| 8  | —   | —   | —   | 283 | 235 | 204 | 177 | 158 | 142 | 118 | 101 | 88  | 79  | 71  |
| 9  | —   | —   | —   | —   | 272 | 235 | 205 | 182 | 164 | 136 | 117 | 102 | 91  | 81  |
| 10 | —   | —   | —   | —   | —   | 267 | 232 | 207 | 186 | 155 | 133 | 116 | 103 | 92  |
| 11 | —   | —   | —   | —   | —   | —   | 260 | 231 | 218 | 173 | 148 | 129 | 115 | 103 |
| 12 | —   | —   | —   | —   | —   | —   | —   | 256 | 230 | 191 | 164 | 143 | 127 | 114 |

## c) Kupferne Dampfleitungsrohre mit innerem Druck.

| Wandstärke<br>in Millim. | Dampf-Ueberdruck in Atmosphären:                |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |
|--------------------------|-------------------------------------------------|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|
|                          | 1                                               | 1½ | 2  | 2½ | 3  | 3½ | 4  | 4½ | 5  | 6  | 7  | 8  | 9  | 10 |
|                          | Grösster zulässiger Durchmesser in Centimetern: |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |
| 2                        | 27                                              | 18 | 14 | 12 | 9  | 8  | 7  | 6  | 6  | 5  | 4  | 4  | 3  | 3  |
| 3                        | —                                               | 62 | 48 | 38 | 32 | 27 | 23 | 21 | 19 | 16 | 14 | 12 | 10 | 9  |
| 4                        | —                                               | —  | —  | —  | —  | —  | 40 | 36 | 32 | 27 | 25 | 20 | 17 | 16 |
| 5                        | —                                               | —  | —  | —  | —  | —  | —  | —  | —  | —  | 35 | 28 | 25 | 22 |
| 6                        | —                                               | —  | —  | —  | —  | —  | —  | —  | —  | —  | —  | 36 | 32 | 29 |

## d) Gusseiserne Dampfzylinder und -Rohre mit innerem Druck.

|    |     |     |     |     |     |     |     |     |     |     |     |     |     |     |
|----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|
| 10 | 25  | 17  | 13  | 10  | 8   | 7   | 6   | 5   | 5   | 4   | 3   | 3   | 3   | 2   |
| 15 | 125 | 73  | 62  | 49  | 41  | 35  | 31  | 27  | 25  | 20  | 17  | 15  | 14  | 12  |
| 20 | 225 | 149 | 112 | 89  | 74  | 63  | 55  | 49  | 44  | 36  | 31  | 27  | 24  | 21  |
| 25 | 325 | 216 | 161 | 128 | 107 | 91  | 80  | 70  | 64  | 53  | 44  | 39  | 35  | 31  |
| 30 | —   | 282 | 211 | 168 | 140 | 119 | 104 | 92  | 83  | 69  | 58  | 51  | 46  | 40  |
| 35 | —   | —   | 260 | 207 | 173 | 148 | 129 | 114 | 103 | 85  | 72  | 63  | 56  | 50  |
| 40 | —   | —   | —   | 247 | 206 | 176 | 154 | 136 | 122 | 101 | 86  | 75  | 67  | 59  |
| 45 | —   | —   | —   | 286 | 239 | 204 | 178 | 158 | 142 | 117 | 100 | 87  | 77  | 69  |
| 50 | —   | —   | —   | —   | 272 | 232 | 203 | 180 | 161 | 133 | 114 | 99  | 88  | 78  |
| 55 | —   | —   | —   | —   | —   | 260 | 227 | 201 | 181 | 150 | 127 | 111 | 99  | 88  |
| 60 | —   | —   | —   | —   | —   | 288 | 252 | 223 | 200 | 166 | 141 | 123 | 109 | 97  |
| 65 | —   | —   | —   | —   | —   | —   | 277 | 245 | 220 | 182 | 155 | 135 | 120 | 107 |

## e) Messingene Feuerrohre mit äusserem Druck.

|   |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |
|---|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|
| 2 | 2  | 1  | —  | —  | —  | —  | —  | —  | —  | —  | —  | —  | —  | —  |
| 3 | 12 | 10 | 9  | 9  | 8  | 8  | 7  | 7  | 7  | 7  | 6  | 6  | 5  | 5  |
| 4 | 22 | 19 | 17 | 16 | 15 | 14 | 13 | 13 | 13 | 12 | 11 | 11 | 10 | 10 |
| 5 | —  | 28 | 26 | 23 | 22 | 21 | 20 | 19 | 19 | 18 | 17 | 16 | 15 | 15 |

## f) Schmiedeeiserne Feuerrohre mit äusserem Druck.

|    |     |     |     |     |     |     |     |     |     |     |     |     |     |     |
|----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|
| 6  | 70  | 61  | 56  | 52  | 48  | 46  | 44  | 42  | 41  | 39  | 37  | 35  | 34  | 32  |
| 7  | 85  | 74  | 68  | 63  | 59  | 56  | 53  | 51  | 50  | 47  | 45  | 42  | 41  | 39  |
| 8  | 100 | 87  | 80  | 74  | 70  | 66  | 63  | 60  | 58  | 55  | 53  | 50  | 48  | 46  |
| 9  | 115 | 101 | 91  | 85  | 81  | 76  | 72  | 69  | 67  | 64  | 60  | 57  | 55  | 53  |
| 10 | 130 | 114 | 103 | 96  | 93  | 85  | 82  | 78  | 76  | 72  | 68  | 65  | 62  | 60  |
| 11 | —   | 127 | 115 | 107 | 104 | 95  | 91  | 87  | 84  | 80  | 76  | 72  | 69  | 67  |
| 12 | —   | —   | 127 | 118 | 115 | 105 | 101 | 97  | 93  | 88  | 84  | 80  | 77  | 74  |
| 13 | —   | —   | —   | 129 | 126 | 115 | 110 | 106 | 102 | 96  | 92  | 87  | 84  | 81  |
| 14 | —   | —   | —   | —   | —   | 125 | 120 | 115 | 111 | 105 | 99  | 95  | 91  | 88  |
| 15 | —   | —   | —   | —   | —   | —   | 129 | 124 | 119 | 113 | 107 | 102 | 98  | 95  |
| 16 | —   | —   | —   | —   | —   | —   | —   | 133 | 128 | 121 | 115 | 110 | 105 | 102 |

Nach den Versuchen von Fairbairn ist die Widerstandsfähigkeit von Röhren mit äusserem Druck von der Länge der Röhren abhängig, und wird bei grösserer Länge vermindert. Es ist daher rathsam, lange Feuerröhren durch umgelegte Ringe zu versteifen.

Zur Vergleichung diene die Fairbairn'sche Formel:

$$\text{für englische Maasse } \delta = \sqrt{\frac{p L d}{161200}} = 0,0025 \sqrt{p L d},$$

$$\text{für französische Maasse } \delta = 0,27 \sqrt{p L d},$$

worin:

$\delta$  die erforderliche Wandstärke in Millim.,

$p$  den Dampfdruck in Kilogr. pro Qu.-Centim.,

$d$  den Durchmesser der Feuerrohre in Centim.,

$L$  die Länge derselben (zwischen den Versteifungsringen) in Metern

bezeichnet.

#### Heizfläche und Verdampfung.

1) Man rechnet Heizfläche pro effektive Pferdekraft:

- a) für gewöhnliche Kessel 1,5 bis 2 Qu.-Meter;
- b) für Gussstahlkessel und Kessel mit dünnen Eisenstärken 1,2 bis 1,5 Qu.-Meter.
- c) Für Kessel, bei denen Garantie auf geringen Kohlenverbrauch eingegangen ist, bis 2,5 Qu.-Meter;
- d) für Dampfschiffskessel 0,6 bis 0,8 Qu.-Meter;
- e) für Lokomotivkessel bei scharfem künstlichen Zug 0,4 bis 0,6 Qu.-Meter;
- f) für Lokomobilkessel 0,6 bis 1,0 Qu.-Meter.

2) Die Verdampfung beträgt pro effektive Pferdekraft und Stunde 0,023 bis 0,031 Cub.-Meter.

Die vorstehende Angabe passt für gut konstruirte Hochdruckmaschinen ohne Condensation und ohne Expansion.

3) Die Heizfläche verdampft Wasser pro Stunde:

- bei gewöhnlichen Kesseln 15 bis 20 Kilogr. pro Qu.-Meter;  
bei Gussstahlkesseln 20 bis 25 Kilogr. pro Qu.-Meter;

bei Dampfschiffskesseln 27 bis 35 Kilogr. pro Qu.-Meter;  
bei Lokomotivkesseln 42 bis 50 Kilogr. pro Qu.-Meter.

### Feuerung.

1) Die Grösse der totalen Rostfläche betrage:

a) Bei stationären Kesseln pro effektive Pferdekraft:  
für Steinkohlenfeuerung 0,05 bis 0,066 Qu.-Meter;  
für Holz- und Braunkohlenfeuerung 0,075 bis 0,1  
Qu.-Meter.

b) Bei Schiffskesseln  $\frac{1}{26}$  bis  $\frac{1}{27}$  der totalen Heizfläche;

c) Bei Lokomotiv- und Lokomobilkesseln  $\frac{1}{50}$  bis  $\frac{1}{80}$   
der totalen Heizfläche.

2) Die freie Rostfläche betrage:

|                          |                                 |                              |
|--------------------------|---------------------------------|------------------------------|
| für Steinkohlenfeuerung  | $\frac{1}{4}$ bis $\frac{1}{3}$ | } der totalen<br>Rostfläche. |
| „ Braunkohlenfeuerung    | $\frac{1}{5}$ „ $\frac{1}{3}$   |                              |
| „ Holzfeuerung . . . . . | $\frac{1}{7}$ „ $\frac{1}{6}$   |                              |

3) Der Consum an Steinkohlen beträgt (bei Hochdruckmaschinen) pro Pferdekraft und Tag à 12 Stunden  
1 bis  $1\frac{1}{5}$  Scheffel = 1 bis  $1\frac{1}{5}$  Centner.

3 Pfund mittlere Steinkohlen verdampfen so viel als  
5 Pfund Braunkohlen oder 8 Pfund Holz.

Condensation bei Dampfmaschinen spart ca. 20 %  
Brennmaterial.

Durchschnittlich kann man die von 1 Pfund Brennstoff producirte Dampfmenge annehmen:

|                            |              |
|----------------------------|--------------|
| bei lufttrockenem Holz . . | = 2,4 Pfund, |
| „ trockenem Torf . . . .   | = 4,2 „      |
| „ Torf mit 20 % Wasser =   | 3,1 „        |
| „ Braunkohle . . . . .     | = 3,9 „      |
| „ mittlere Steinkohle . .  | = 6,5 „      |
| „ Coks mit 15 % Asche .    | = 5,2 „      |

Kessel mit dünnen Blechstärken geben pro Pfund  
Brennmaterial eine bis 28 % grössere Verdampfung als  
gewöhnliche Dampfkessel.

**Schornsteine.**

1) Die Höhe der Schornsteine, oft von lokalen Verhältnissen abhängig, mache man selbst für kleine Kessel von 4 Pferdekraft an nicht unter 16 Meter.

Lokomobil-Schornsteinen gebe man über dem Ausblaserohre eine Höhe von mindestens dem 5- bis 6fachen Durchmesser.

2) Material und Querschnittsform.

a) Runde Blechschornsteine sind für kleine Dimensionen billig und zu empfehlen:

bei beschränkter Bauzeit, bei schlechtem Baugrund und bei provisorischen Anlagen.

b) Gemauerte runde Schornsteine sind als billig und gut zu empfehlen.

c) Gemauerte 8- und 4kantige (erstere vorzuziehen) sind bei gutem Baugrund zu empfehlen, wenn ordinaire Steine billig und Formsteine zu runden Schornsteinen nicht leicht zu beschaffen sind.

3) Den Querschnitt der Mündung nehme man:

a) Für stationäre Schornsteine:

bei 16 bis 31 Metern Höhe =  $\frac{3}{5}$  bis  $\frac{1}{3}$  der freien Rostfläche = 0,006 bis 0,01 Qu.-Meter pro Pferdekraft;

bei 31 bis 62 Metern Höhe =  $\frac{1}{3}$  bis  $\frac{1}{6}$  der freien Rostfläche = 0,003 bis 0,006 Qu.-Meter pro Pferdekraft.

b) Für Lokomobil-Schornsteine = dem 1- bis  $1\frac{1}{2}$ -fachen Cylinder-Durchmesser der Maschine.

Den untern innern Durchmesser nehme man aus stabilen Rücksichten  $\frac{1}{60}$  der Höhe grösser als den oberlichten Durchmesser.

**Dampfleitung.**

1) Durchmesser mindestens gleich dem  $1\frac{1}{4}$ fachen Durchmesser des Sicherheitsventils.

Gusseiserne Dampfleitungen bis 26 Centim. Durchmesser.

Darüber nehme man schmiedeeiserne Dampfleitungen von mindestens 31 Centim. Durchmesser.

2) Ausdehnung der Dampfleitung:

bei gusseisernen Röhren  $\frac{1}{900}$  der Länge;

„ schmiedeeisernen Röhren  $\frac{1}{800}$  der Länge.

3) Die Condensation in Dampfleitungen beträgt bei einer Dampfspannung von 2 bis 4 Atmosphären Ueberdruck:

durchschnittlich pro 1 Qu.-Meter Oberfläche und pro Stunde:

bei guter Umhüllung 0,75 bis 1 Kilogr. Wasser;

ohne Umhüllung . . . 2 „ 3 „ „

## E. Dampfmaschinen.

### Effektberechnung.

Es bezeichne:

N die theoretische Leistung der Maschine in Pferdekraften,

$\alpha$  den Wirkungsgrad,

$\alpha N$  die effektive Leistung in Pferdekraften,

$\gamma$  das Maass einer Pferdekraft = 75 Kilogr.-Meter pro Sek.,

S die totale Dampfspannung incl. Atmosphärendruck,

s die mittlere auf den Kolben wirkende Dampfspannung incl. Atmosphärendruck in Kilogr. pro Qu.-Centim.,

p den schädlichen Gegendruck, herrührend von der Spannung im Condensator oder dem Druck der Luft, in Kilogr. pro Qu.-Centim.,

(s -- p) den mittlern Ueberdruck in Kilogr. pro Qu.-Centim.,

f den Querschnitt des Dampfzylinders in Qu.-Centim.,

v die Kolbengeschwindigkeit in Metern pro Min.,

dann hat man:

$$N = \frac{f(s-p)v}{60 \gamma} \text{ Pferdekraften; } f = 60 \gamma \frac{N}{v(s-p)},$$

und

$$\alpha N = \alpha \frac{f(s-p)v}{60 \gamma} \text{ Pferdekraften; } f = 60 \gamma \frac{\alpha N}{\alpha v(s-p)}.$$

2) Tabelle über die mittlere Spannung  $s$  bei verschiedenen Füllungsgraden.

|                       |                |                |                |               |               |               |               |
|-----------------------|----------------|----------------|----------------|---------------|---------------|---------------|---------------|
| Füllungsgrad =        | $\frac{1}{12}$ | $\frac{1}{11}$ | $\frac{1}{10}$ | $\frac{1}{8}$ | $\frac{1}{6}$ | $\frac{1}{5}$ | $\frac{1}{4}$ |
| Mittl. Spannung $s =$ | 0,275 S.       | 0,3 S.         | 0,35 S.        | 0,385 S.      | 0,45 S.       | 0,525 S.      | 0,6 S.        |
| Füllungsgrad =        | $\frac{1}{3}$  | $\frac{2}{8}$  | $\frac{1}{2}$  | $\frac{5}{8}$ | $\frac{3}{4}$ | $\frac{7}{8}$ | 1             |
| Mittl. Spannung $s =$ | 0,7 S.         | 0,725 S.       | 0,85 S.        | 0,925 S.      | 0,95 S.       | 0,975 S.      | S.            |

3) Der schädliche Gegendruck beträgt:

bei Condensations-Maschinen  $p = 0,15$  bis  $0,3$  Kilogr. pro Qu.-Centim.;

„ Maschinen ohne Condensation  $p = 1,1$  Kilogr. pro Qu.-Centim.;

„ Lokomotiven und Lokomobilen  $p = 1,2$  Kilogr. pro Qu.-Centim.

4) Tabelle über die Wirkungsgrade verschiedener Maschinen.

| Pferde-<br>kräfte.<br>$\alpha N$ | Niederdruck-<br>maschinen.<br>$\alpha =$ | Woolf'sche<br>Maschinen.<br>$\alpha =$ | Hochdruckmaschinen               |                                 |
|----------------------------------|------------------------------------------|----------------------------------------|----------------------------------|---------------------------------|
|                                  |                                          |                                        | ohne<br>Expansion.<br>$\alpha =$ | mit<br>Expansion.<br>$\alpha =$ |
| 4 bis 10                         | 0,40 bis 0,50                            | —                                      | 0,40 bis 0,50                    | 0,30 bis 0,40                   |
| 10 „ 20                          | 0,43 „ 0,53                              | —                                      | 0,45 „ 0,55                      | 0,35 „ 0,45                     |
| 20 „ 30                          | 0,46 „ 0,56                              | 0,30 bis 0,35                          | 0,45 „ 0,60                      | 0,30 „ 0,50                     |
| 30 „ 40                          | 0,48 „ 0,58                              | 0,35 „ 0,40                            | 0,50 „ 0,65                      | 0,45 „ 0,55                     |
| 40 „ 100                         | 0,50 „ 0,60                              | 0,40 „ 0,55                            | 0,55 „ 0,70                      | 0,50 „ 0,70                     |

Die Wirkungsgrade für Zwillingmaschinen sind höher als für Maschinen mit 1 Cylinder und betragen bis  $\alpha = 0,75$ .

5) Die theoretische Leistung einer Woolf'schen Maschine ist gleich der Leistung einer gewöhnlichen Maschine mit dem grossen Cylinder, in welchem dieselbe Expansion stattfindet, wie bei der Woolf'schen Maschine.

Für Woolf'sche Maschinen bestimme man daher zunächst die Dimensionen des grossen Cylinders wie für eine gewöhnliche Maschine unter der Voraussetzung, dass die Füllung des grossen Cylinders dem angenommenen Expansions-Verhältnisse entspricht. Die Dimensionen des kleinen Cylinders wähle man so, dass der Dampf bei  $\frac{2}{3}$  des Hubes abgesperrt wird.

6) 1 Cub.-Meter Dampf pro Sek. von 1 Atmosphäre Spannung gibt ohne Berücksichtigung des schädlichen Gegendruckes eine theoretische Leistung von 136 Pferdekkräfte.

Unter Berücksichtigung des schädlichen Gegendruckes hat man die theoretische Leistung bei  $n$  Atmosphären Gesamtspannung (incl. Atmosphärendruck):

Bei Condensationsmaschinen:

$$136 n - \frac{0,3}{1,03} \quad 136 \text{ Pferdekkräfte, bei 1 Cub.-Meter pro Sek.,}$$

Bei Maschinen ohne Condensation:

$$136 n - \frac{1,1}{1,03} \quad 136 \text{ Pferdekkräfte, bei 1 Cub.-Meter pro Sek.}$$

Bei Lokomotiven:

$$136 n - \frac{1,2}{1,03} \quad 136 \text{ Pferdekkräfte, bei 1 Cub.-Meter pro Sek.}$$

Lässt man den Dampf expandiren, so hat man die theoretische Leistung, wenn die Gesamtspannung vor der Expansion  $n$  Atmosphären betrug:

Bei Condensationsmaschinen:

$$L = 136 \varrho n - 40 \text{ Pferdekkräfte, bei 1 Cub.-Meter pro Sek.}$$

Bei Maschinen ohne Condensation:

$$L = 136 \varrho n - 145 \text{ Pferdekkräfte, bei 1 Cub.-Meter pro Sek.}$$



Bei Lokomotiven:

$L = 136 \rho n - 158$  Pferdekkräfte, bei 1 Cub.-Meter pro Sek., unter  $\rho$  den dem Expansionsverhältniss entsprechenden Koëffizienten verstanden.

7) Für Dampfmaschinen mit voller Füllung hat man annähernd bei 3 Atmosphären Ueberdruck und 50% Nutzeffekt:

Bei 75 Meter Kolbengeschwindigkeit und einem Cylinderdurchmesser von  $d$  Centimeter:

$$\alpha N = 0,02 d^2.$$

Diesen Werth multiplicire man:

Bei  $n$  Atmosphären Ueberdruck mit  $\frac{n}{3}$ ;

„  $\alpha$  Nutzeffekt mit  $\frac{\alpha}{0,50}$ ;

„  $v$  Kolbengeschwindigkeit mit  $\frac{v}{180} \left( \frac{v}{75} \right)$ ;

„ einer Maschine mit Expansion, wenn man den mittleren Ueberdruck  $(s - p)$  in Atmosphären ausdrückt, mit  $\frac{(s - p)}{3}$ .

#### Kolbengeschwindigkeit.

Bei stationären Maschinen wendet man Kolbengeschwindigkeiten von 56 bis 250 Meter pro Minute an. Letztere Geschwindigkeit kommt bei Walzenzugmaschinen vor.

Bezeichnet

$N$  die theoretische Nutzleistung der Maschine in Pferdekkräften,

$(s - p)$  den mittleren Ueberdruck in Kilogr. pro Qu.-Centim.,

$z$  die Anzahl der Umdrehungen pro Min.,

$x$  das Verhältniss des Hubes am Cylinderdurchmesser,

$v$  die Kolbengeschwindigkeit in Metern pro Min.,

so hat man:

$$v = 1,32 \sqrt[3]{\frac{x^2 z^3 N}{(s - p)}}$$

Nimmt man  $x = 2$ , so ist:

$$v = 2,1 \sqrt[3]{\frac{z^3 N}{(s - p)}}$$

Ist  $z$  nicht vorgeschrieben, so pflegt man die Kolbengeschwindigkeit

bei gewöhnlichen Maschinen 63 bis 94 Meter,

„ Maschinen mit geringen Dimensionen 94 bis 157 Meter,

„ Lokomotiven nicht über 150 Meter,

„ direkt wirkenden Wasserhaltungs- und Pumpmaschinen 28 bis 38 Meter

zu wählen.

#### **Dampfkanäle.**

Der Querschnitt der Zuleitungskanäle betrage:

bei grosser Kolbengeschwindigkeit  $\frac{1}{16}$  bis  $\frac{1}{20}$ ;

„ gewöhnlicher Kolbengeschwindigkeit  $\frac{1}{20}$  bis  $\frac{1}{30}$  vom Querschnitt des Cylinders.

Der Querschnitt der Ausströmungskanäle betrage  $\frac{5}{4}$  vom Querschnitt der Zuleitungskanäle.

Bei Lokomobilen verenge man die Ausblaseöffnung im Schornsteine auf  $\frac{1}{2}$  des ursprünglichen Querschnitts.

#### **Condensation, Luftpumpe und Speisewasser.**

1) Bei einer Temperatur von  $40^\circ$  im Condensator rechne man pro Pferdekraft und Stunde 0,62 Cub.-Meter Einspritzwasser.

2) Die Luftpumpe muss an Wasser. Luft und Dampf pro effektive Pferdekraft und Stunde 2,22 Cub.-Meter fördern können. Der Sicherheit halber nehme man das Doppelte, also pro Pferdekraft und Stunde 4,44 Cub.-Meter.

Bei der Watt'schen Maschine beträgt der Durchmesser der Luftpumpe  $= \frac{2}{3}$  vom Durchmesser des Cylinders, der Hub in der Luftpumpe  $=$  dem halben Hub des Dampfkolbens.

3) Das Volum des Condensators nehme man gleich dem Volum der Luftpumpe.

4) Jede Speise-Vorrichtung muss pro Pferdekraft und Stunde 0,03 Cub.-Meter Wasser liefern können; der Sicherheit wegen nehme man das doppelte bis 3fache Quantum an.

## F. Dampfhämmer.

A. Die Bestimmung des Cylinder-Durchmessers hängt ab: Vom Gewichte des Fallbärs, von der Hubhöhe, Anzahl der Schläge und Grösse der Dampfspannung.

Folgende Angaben sind im Allgemeinen passend:

Bezeichnet

f den Querschnitt des Cylinders nach Abzug des Querschnitts der Kolbenstange in Qu.-Centim.,

s den niedrigsten Dampf-Ueberdruck, mit welchem der Hammer arbeiten soll, in Kilogr. pro Qu.-Centim.,

G das Gewicht des Hammers in Kilogr.,  
dann nehme man:

1) Für Schnellhämmer mit doppelter Füllung des Cylinders

bis 3 Ctr. Fallgewicht, bei 300 bis 400 Schlägen pro Min. . . . .  $f s = (5 \text{ bis } 6) G$ ,

bei 3 bis 10 Ctr. Fallgewicht und 150 bis 300 Schlägen pro Min. . . . .  $f s = (4 \text{ bis } 5) G$ .

2) Für Dampfhämmer

von 10 bis 25 Ctr. . . . .  $f s = (2,5 \text{ bis } 3) G$ .

„ 25 „ 50 „ . . . . .  $f s = (2 \text{ bis } 2,5) G$ .

„ 50 „ 100 „ . . . . .  $f s = (1,75 \text{ bis } 2) G$ ,

„ 100 „ 200 „ . . . . .  $f s = (1,5 \text{ bis } 1,75) G$ .

B. Der Durchmesser der Kolbenstange betrage:

1) Für Dampfhämmer mit dicker Kolbenstange  $\frac{1}{2}$  bis  $\frac{5}{8}$  des Cylinder-Durchmessers.

2) Für Dampfhämmer mit dünner Kolbenstange:

| Bei einem Hube von       | Zum Schmieden<br>von Eisen        | Zum Schmieden<br>von Stahl       |
|--------------------------|-----------------------------------|----------------------------------|
| weniger als 1 Meter . .  | $\frac{1}{12}$ bis $\frac{1}{10}$ | $\frac{1}{10}$ bis $\frac{1}{8}$ |
| 1 bis 2 Meter . . . . .  | $\frac{1}{10}$ „ $\frac{1}{8}$    | $\frac{1}{8}$ „ $\frac{1}{6}$    |
| mehr als 2 Meter . . . . | $\frac{1}{8}$ „ $\frac{1}{6}$     | $\frac{1}{6}$ „ $\frac{1}{5}$    |

vom Durchmesser des Cylinders.

Bei Anwendung von frischem Oberdampf nehme man den Durchmesser der Kolbenstange 25% stärker.

C. Den Hub des Hammers kann man unter gewöhnlichen Verhältnissen  $= 0,026 \sqrt{G}$  Meter bei G Kilogr. annehmen.

Absperrung des Dampfes durch den Sicherheitshebel erfolge auf  $\frac{2}{5}$  bis  $\frac{3}{5}$  des Hubes. Das Oeffnen der Ausströmungsöffnung auf  $\frac{3}{5}$  bis  $\frac{4}{5}$  des Hubes.

D. Das Gewicht der Chabotte betrage:

Für Hämmer zum Schmieden von Eisen im Min.

das 8fache Gewicht des Fallbärs;

„ Hämmer zum Schmieden von Stahl im Min.

das 12fache Gewicht des Fallbärs.

Bei Hämmern mit frischem Oberdampf nehme man das Gewicht der Chabotte um 30% grösser an.

## G. Pumpen.

Der Kraft-Verbrauch einer Pumpe beträgt:

$$\propto \frac{Q H}{75 \cdot 60} \text{ 1000 Pferdekkräfte,}$$

wenn  $H$  die Summe der Sauge- und Druckhöhe in Metern bezeichnet.

Der Koeffizient  $\alpha$  beträgt:

bei sorgfältig ausgeführten Pumpen  $\alpha = 1,25$ ;

„ guten Pumpen  $\alpha = 1,3$ ;

„ gewöhnlichen Pumpen  $\alpha = 1,4$  bis  $1,5$ .

Bei Bergwerkspumpen macht man das Gewicht des Pumpengestänges:

bei 2 Meter Hub in der Pumpe  $= 1,14$ . bei 3 Meter Hub  $= 1,1$  vom Gewichte der auf den Plunger wirkenden Wassersäule.

Centrifugalpumpen wendet man mit Vorthail für massenhafte Wasserförderungen auf mässige Höhen an. Die Saugehöhe ist möglichst gering, womöglich nicht über 3,8 Meter, im Maximum 6 Meter zu wählen. Die ganze Hebehöhe wählt man womöglich nicht über 12,55 Meter, und beträgt dann bei guter Konstruktion der Nutzeffekt von der Betriebskraft 50 bis 70 %. Bei grösserer Hebehöhe fällt der Nutzeffekt bedeutend.

Umfangsgeschwindigkeit des Flügelrades wählt man passend gleich  $\frac{3}{2}$  mal Ausflussgeschwindigkeit unter einer Druckhöhe gleich der totalen Hebehöhe ( $\frac{3}{2} \sqrt{2gh}$ , wenn  $h$  die Hebehöhe bezeichnet). Pro theoretische Pferdekraft rechnet man 0,3 Qu.-Meter Riemenabwicklung pro Sekunde.

## H. Gebläse.

### A. Ventilatoren.

#### 1) Bezeichnet

Q die pro Sekunde zu liefernde Luftmenge in Cub.-Met.,  
h den Druck des Windes am Ausblasehals in Centim.  
einer Wassersäule,

p den Druck des Windes in Kilogr. pro Qu.-Centim.,

$\gamma$  das Gewicht eines Cub.-Meter Wasser,

$\rho$  den Wirkungsgrad (0,25 bis 0,40),

N die Betriebskraft in Pferdekraften,

dann hat man:

$$p = \frac{g h}{1000000} = 0,001 h;$$

$$N = \frac{1}{\rho} \frac{\gamma h}{75 \cdot 100} Q.$$

Beträgt der Wirkungsgrad 0,30, so hat man:

$$N = 0,444 h Q = 444 p Q.$$

2) Die Umfangsgeschwindigkeit des Flügelrades pro Sekunde nimmt man:  $v = 50$  bis  $86$  Meter.

Für 1 Schmiedefeuer kann man pro Sek. 0,02 bis 0,03 Cub.-Meter, für 100 Pfund einzuschmelzendes Eisen 31 bis 37 Cub.-Meter Wind rechnen.

### B. Cylinder-Gebläse.

#### 1) Bezeichnet

F den Querschnitt des Gebläsecylinders in Qu.-Metern,

v die mittlere Kolbengeschwindigkeit in Metern pro Min.,

$\alpha$  den Nutzeffekt, je nach der Güte des Gebläses = 0,60 bis 0,75,

Q das pro Sek. zu liefernde Windquantum in Cub.-Met.,

so hat man:

$$Q = \alpha \frac{F v}{60}.$$

2) Die Betriebskraft beträgt bei einem Druck von  $h$  Centim. oder  $p$  pro Qu.-Centim.:

$$N = \frac{1}{\rho} \frac{10000 F p v}{75 \cdot 60} = \frac{1}{\rho \alpha} \frac{1000 h}{75 \cdot 100} Q = \frac{1}{\rho \alpha} \frac{10000 p}{75} Q$$

Pferdekkräfte,

wobei der Wirkungsgrad  $\rho = 0,70$  bis  $0,75$  und  $\alpha \rho = 0,45$  bis  $0,60$  anzunehmen ist.

Für hohe Windpressungen ist statt der Spannung  $p$  eine mittlere Spannung  $\mu p$  einzusetzen und kann man annehmen für:

$$\begin{array}{l} p = |0,073| 0,146 | 0,219 | 0,292 | 0,365 | 0,439 | 0,512 | 0,585 | 0,658 \\ \mu = |0,97 | 0,94 | 0,91 | 0,89 | 0,85 | 0,81 | 0,78 | 0,75 | 0,72 \end{array}$$

Kilogr. pro Qu.-Centim.

3) Die mittlere Kolbengeschwindigkeit wählt man gewöhnlich  $v = 56$  bis  $75$  Meter, bei guter Konstruktion der Windabsperungen nimmt man  $v = 75$  bis  $125$  Meter.

4) Die Länge des Kolbenlaufs nimmt man für Windcylinder bis  $1,6$  Meter Durchmesser gleich dem  $1$ - bis  $\frac{6}{5}$ fachen, darüber Durchmesser gleich dem  $\frac{3}{4}$ - bis  $1$ fachen Durchmesser des Cylinders.

5) Querschnitt der Saugeventile  $= \frac{1}{12}$  bis  $\frac{1}{9}$ ,  
 „ „ Druckventile  $= \frac{1}{25}$  bis  $\frac{1}{20}$   
 vom Querschnitt des Windcylinders.

## I. Wärme.

### Thermometer-Skalen.

$n$  Grad Celsius  $= 32 + \frac{9}{5} n$  Grad Fahrenheit  $= \frac{4}{5} n$  Grad Reaumur.

$n$  Grad Reaumur  $= 32 + \frac{9}{4} n$  Grad Fahrenheit  $= \frac{5}{4} n$  Grad Celsius.

$n$  Grad Fahrenheit  $= \frac{5}{9} (n - 32)$  Grad Celsius  $= \frac{4}{9} (n - 32)$  Grad Reaumur.

Tabelle zur Vergleichung der Thermometergrade.

| Celsius. | Fahren-<br>heit. |
|----------|------------------|
| —20      | 233,2            |
| —19      | 230,0            |
| —18      | 231,8            |
| —17      | 233,6            |
| —16      | 235,4            |
| —15      | 237,2            |
| —14      | 239,0            |
| —13      | 240,8            |
| —12      | 242,6            |
| —11      | 244,4            |
| —10      | 246,2            |
| —9       | 248,0            |
| —8       | 249,8            |
| —7       | 251,6            |
| —6       | 253,4            |
| —5       | 255,2            |
| —4       | 257,0            |
| —3       | 258,8            |
| —2       | 260,6            |
| —1       | 262,4            |
| 0        | 264,2            |
| 1        | 266,0            |
| 2        | 267,8            |
| 3        | 269,6            |
| 4        | 271,4            |
| 5        | 273,2            |
| 6        | 275,0            |
| 7        | 276,8            |
| 8        | 278,6            |
| 9        | 280,4            |
| 10       | 282,2            |
| 11       | 284,0            |
| 12       | 285,8            |
| 13       | 287,6            |
| 14       | 289,4            |
| 15       | 291,2            |
| 16       | 293,0            |
| 17       | 294,8            |
| 18       | 296,6            |
| 19       | 298,4            |
| 20       | 300,2            |
| 21       | 302,0            |
| 22       | 303,8            |



**Temperatur bei verschiedenen Wärme-Bezeichnungen.**

|                            | Grad C. |                         | Grad C. |
|----------------------------|---------|-------------------------|---------|
| Im Dunkeln rothglühend     | 525     | Dunkelorange . . .      | 1100    |
| Dunkelroth . . . . .       | 700     | Hellorange . . . . .    | 1200    |
| Dunkelkirschroth . . . . . | 800     | Weissglühend . . . . .  | 1300    |
| Kirschroth . . . . .       | 900     | Schweisshitze . . . . . | 1400    |
| Hellkirschroth . . . . .   | 1000    | Blendendweiss . . . . . | 1500    |

**Tabelle über die Längenausdehnung verschiedener Körper bei der Wärmezunahme von 0 bis 100 Grad C.**

| Benennung.          | Längen-Ausdehn.  | Benennung.          | Längen-Ausdehn.  | Benennung.            | Längen-Ausdehn.   |
|---------------------|------------------|---------------------|------------------|-----------------------|-------------------|
| Blei . . . . .      | $\frac{1}{251}$  | Messing . . . . .   | $\frac{1}{636}$  | Stahl, gehärtet       | $\frac{1}{807}$   |
| Glas . . . . .      | $\frac{1}{1160}$ | Platin . . . . .    | $\frac{1}{1100}$ | Zink . . . . .        | $\frac{1}{340}$   |
| Gold . . . . .      | $\frac{1}{682}$  | Silber . . . . .    | $\frac{1}{634}$  | Zinn . . . . .        | $\frac{1}{516}$   |
| Gusseisen . . . . . | $\frac{1}{900}$  | Stabeisen . . . . . | $\frac{1}{812}$  | Quecksilber . . . . . | $\frac{1}{166,6}$ |
| Kupfer . . . . .    | $\frac{1}{582}$  | Stahl, ungehärtet   | $\frac{1}{927}$  | Wasser . . . . .      | $\frac{1}{71,4}$  |

Die körperliche Ausdehnung von 0 bis 100 Grad C. beträgt für:

Quecksilber =  $\frac{1}{55,5}$ ; Wasser =  $\frac{1}{23,8}$ ; Luft =  $\frac{1}{30}$ .

Die Ausdehnung des Wassers ist bei verschiedenen Temperaturen sehr verschieden. Bei 4 Grad C. ist die Dichtigkeit desselben ein Maximum.

**Tabelle der specifischen Wärme verschiedener Körper.**

Einheit = Wärmearaufwand, um die Temperatur von 1 Pfund Wasser um 1 Grad C. zu erhöhen = 1 Calorie.

| Benennung.          | Spec. Wärme. | Benennung.              | Spec. Wärme. | Benennung.            | Spec. Wärme. |
|---------------------|--------------|-------------------------|--------------|-----------------------|--------------|
| Blei . . . . .      | 0,0314       | Quecksilber . . . . .   | 0,0333       | Zinn . . . . .        | 0,0562       |
| Glas . . . . .      | 0,1777       | Schmiedeeisen . . . . . | 0,1138       | Alkohol, abs. . . . . | 0,7000       |
| Gusseisen . . . . . | 0,1298       | Silber . . . . .        | 0,0570       | Wasser . . . . .      | 1,000        |
| Kupfer . . . . .    | 0,0952       | Stahl . . . . .         | 0,1185       | Luft (const. Vol.)    | 0,1687       |
| Messing . . . . .   | 0,0939       | Zink . . . . .          | 0,0956       | „ (const. Druck)      | 0,2377       |

**Schmelzpunkte verschiedener Körper.**

| Benennung.         | Grad C. | Benennung.            | Grad C. |
|--------------------|---------|-----------------------|---------|
| Schmiedeeisen . .  | 1600    | Zink . . . . .        | 360     |
| Stahl . . 1300 bis | 1400    | Blei . . . . .        | 330     |
| Gusseisen 1050 bis | 1200    | Wismuth . . . . .     | 260     |
| Kupfer . . . . .   | 1100    | Zinn . . . . .        | 230     |
| Messing . . . . .  | 900     | Schwefel . . . . .    | 109     |
| Antimon . . . . .  | 432     | Quecksilber . . . . . | —39     |

**Schmelzpunkte verschiedener leicht schmelzbarer Legirungen.**

| Grad C. | Gewichtstheile |       |          | Grad C. | Gewichtstheile |       |
|---------|----------------|-------|----------|---------|----------------|-------|
|         | Zinn.          | Blei. | Wismuth. |         | Zinn.          | Blei. |
| 77      | 3              | 5     | 8        | 144     | 3              | 1     |
| 99      | 1              | 1     | 1        | 151     | 1              | 1     |
| 116     | 2              | 2     | 1        | 155     | 6              | 1     |
| 124     | 3              | 3     | 1        | 183     | 1              | 2     |
| 135     | 3              | 3     | —        | 207     | 1              | 4     |

**Siedepunkte und latente Wärme der Dämpfe verschiedener Körper.**

| Benennung.        | Siedep. Gr. C. | Lat. W. Gr. C. | Benennung.      | Siedep. Gr. C. | Lat. W. Gr. C. |
|-------------------|----------------|----------------|-----------------|----------------|----------------|
| Quecksilber . .   | 350            | —              | Wasser . . . .  | 100            | 540            |
| Schwefelsäure . . | 326            | —              | Alkohol . . . . | 78             | 214            |
| Schwefel . . . .  | 316            | —              | Schwefeläther   | 36             | 91             |

**Linearschwindmaass verschiedener Metalle.**

Gusseisen =  $\frac{1}{96}$ ; Messing =  $\frac{1}{65}$ ; 100 Th. Kupfer } =  $\frac{1}{134}$ .  
 Zink . . =  $\frac{1}{62}$ ; Blei . . =  $\frac{1}{92}$ ; 12 $\frac{1}{2}$  „ Zinn }

In Walzwerken rechnet man pro lfd. Meter 42 Centim. Schwindung.

**Dampf- und Wasserheizung.**

1) Dampfheizung: Bei gusseiserner Heizfläche rechnet man 63—94 Cub.-Meter pro Qu.-Meter.

Zur Heizung von Werkstätten 94—157 Cub.-Meter pro Qu.-Meter. Es condensirt pro Stunde ca. 1,78 Kilogr. pro Qu.-Meter Dampf.

2) Warmwasserheizung: Auf 39—47 Cub.-Meter Raum rechnet man 1 Qu.-Meter kupferne Heizfläche.

Leitungsvermögen zwischen Kupfer; Eisenblech und Gusseisen = 1 :  $\frac{5}{12}$  :  $\frac{2}{3}$ .

**Tabelle über die Spannkraft, das specifische Volumen und Gewicht des Wasserdampfes bei verschiedenen Temperaturen.**

| Spannung in<br>Atmosph. | Temperatur<br>Grad Cels. | Spec.<br>Volum.                           | Gewicht<br>von<br>1 Cub.-<br>Meter<br>Dampf.<br>Kilogr. | Spannung in<br>Atmosph. | Temperatur<br>Grad Cels. | Spec.<br>Volum.                           | Gewicht<br>von<br>1 Cub.-<br>Meter<br>Dampf.<br>Kilogr. |
|-------------------------|--------------------------|-------------------------------------------|---------------------------------------------------------|-------------------------|--------------------------|-------------------------------------------|---------------------------------------------------------|
|                         |                          | 1 Vol.<br>Wasser<br>gibt<br>Vol.<br>Dampf |                                                         |                         |                          | 1 Vol.<br>Wasser<br>gibt<br>Vol.<br>Dampf |                                                         |
| 0,072                   | 40,0                     | 20347                                     | 0,0492                                                  | 3,50                    | 140,4                    | 538                                       | 1,859                                                   |
| 0,125                   | 51,0                     | 11971                                     | 0,0835                                                  | 4,00                    | 145,0                    | 476                                       | 2,101                                                   |
| 0,25                    | 66,0                     | 6114                                      | 0,1636                                                  | 4,50                    | 149,1                    | 428                                       | 2,339                                                   |
| 0,50                    | 82,0                     | 3206                                      | 0,3119                                                  | 5,00                    | 153,3                    | 389                                       | 2,574                                                   |
| 0,75                    | 92,0                     | 2224                                      | 0,4496                                                  | 6,00                    | 160,0                    | 328                                       | 3,044                                                   |
| 1,00                    | 100,0                    | 1696                                      | 0,5896                                                  | 7,00                    | 166,5                    | 286                                       | 3,494                                                   |
| 1,25                    | 106,6                    | 1381                                      | 0,7239                                                  | 8,00                    | 172,1                    | 254                                       | 3,941                                                   |
| 1,50                    | 112,4                    | 1169                                      | 0,8554                                                  | 9,00                    | 177,4                    | 228                                       | 4,381                                                   |
| 1,75                    | 117,1                    | 1014                                      | 0,9832                                                  | 10,00                   | 182,0                    | 208                                       | 4,817                                                   |
| 2,00                    | 121,5                    | 896                                       | 1,1165                                                  | 11,00                   | 186,0                    | 190                                       | 5,256                                                   |
| 2,25                    | 125,5                    | 806                                       | 1,2329                                                  | 12,00                   | 190,0                    | 176                                       | 5,683                                                   |
| 2,50                    | 128,8                    | 732                                       | 1,3664                                                  | 13,00                   | 193,7                    | 164                                       | 6,107                                                   |
| 2,75                    | 132,1                    | 671                                       | 1,4906                                                  | 14,00                   | 197,2                    | 153                                       | 6,527                                                   |
| 3,00                    | 135,0                    | 619                                       | 1,6145                                                  | 15,00                   | 200,2                    | 144                                       | 6,944                                                   |

Anm. Werden die Zahlen der letzten Spalte mit 0,001 multiplicirt, so erhält man das spec. Gewicht des Wasserdampfes.

## VII. Eisenbahnbau.

Normal-Profil des freien Raumes für Eisenbahnen.

| Für die freie Bahn. | Für die Bahnhöfe. |          | Meter-Maass. |
|---------------------|-------------------|----------|--------------|
|                     |                   |          |              |
|                     |                   | <i>a</i> | 0,762        |
|                     |                   | <i>b</i> | 1,525        |
|                     |                   | <i>c</i> | 2,007        |
|                     |                   | <i>d</i> | 1,652        |
|                     |                   | <i>e</i> | 1,372        |
|                     |                   | <i>f</i> | 1,143        |
|                     |                   | <i>g</i> | 0,229        |
|                     |                   | <i>h</i> | 0,381        |
|                     |                   | <i>i</i> | 0,762        |
|                     |                   | <i>k</i> | 1,220        |
|                     |                   | <i>l</i> | 3,050        |
|                     |                   | <i>m</i> | 0,839        |
|                     |                   | <i>n</i> | 0,915        |

**Bahn-Anlage.****Kronbreite:**

|                                 |            |
|---------------------------------|------------|
| für 2geleisige Bahnen . . . . . | 7,5 Meter, |
| „ 1 „ „ . . . . .               | 4,0 „      |

**Gefälle:**

|                            |         |   |
|----------------------------|---------|---|
| im flachen Lande . . . . . | 1 : 200 | „ |
| „ Gebirgs- „ . . . . .     | 1 : 40  | „ |
| „ Hügel- „ . . . . .       | 1 : 100 | „ |

**Krümmungshalbmesser der Kurven:**

|                                |       |   |
|--------------------------------|-------|---|
| im flachen Lande . . . . .     | 1100  | „ |
| „ Hügel- „ . . . . .           | 600   | „ |
| ausnahmsweise . . . . .        | 350   | „ |
| im Gebirgslande . . . . .      | 300   | „ |
| ausnahmsweise . . . . .        | 180   | „ |
| Spurweite im Lichten . . . . . | 1,436 | „ |

In Kurven von mehr als 600 Meter Halbmesser wird das Spurmaass nicht erweitert, bei 180 Meter Halbmesser beträgt die Erweiterung höchstens 25 Millim.

**Bahnhöfe.****Entfernung der Geleise von**

|                            |                          |
|----------------------------|--------------------------|
| Mitte zu Mitte . . . . .   | 3,7 Meter bis 4,3 Meter, |
| für Hauptgeleise . . . . . | 5,2 Meter.               |

**Radius der Weichen:**

|                          |            |
|--------------------------|------------|
| für ganze Züge . . . . . | 180 Meter, |
| „ Endweichen . . . . .   | 300 „      |

**Ausfahrtsthore:**

|                                 |                 |
|---------------------------------|-----------------|
| für Lokomotivschuppen . . . . . | 4,8 Meter hoch, |
|                                 | 3,35 „ breit,   |
| für Wagenschuppen . . . . .     | 4,8 „ hoch,     |
|                                 | 3,35 „ breit.   |

**Entfernung der Geleise darin**

|                              |            |
|------------------------------|------------|
| von Mitte zu Mitte . . . . . | 4,4 Meter. |
|------------------------------|------------|

**Lokomotiven.**

1) Tabelle über die mittleren Dimensionen der Haupttheile von Lokomotiven nebst Angabe des Gewichtes.

| Lokomotive<br>für | Durchm. der<br>Cylinder. | Kolbenhub.     | Triebräder.  |                   | Radstand. | Gesamt-<br>Heizfläche. | Gewicht<br>ohne Tender<br>incl. Füllung. | Geschw. pro<br>Dec.-Myriameter<br>à 1,33 Meilen. |
|-------------------|--------------------------|----------------|--------------|-------------------|-----------|------------------------|------------------------------------------|--------------------------------------------------|
|                   | Centi-<br>met.           | Centi-<br>met. | An-<br>zahl. | Durchm.<br>Meter. |           |                        |                                          |                                                  |
| Personenzüge .    | 36-42                    | 52-58          | 2            | 1,9-2,2           | 4,1-4,7   | 70-100                 | 450-600                                  | 4,5-7,5                                          |
| Gemischte Züge    | 39-45                    | 58-63          | 4            | 1,6-1,9           | 3,5-4,4   | 80-110                 | 500-600                                  | 3-4,5                                            |
| Güterzüge . . .   | 42-47                    | 58-63          | 4-6          | 1,3-1,6           | 3,5-4,4   | 80-130                 | 550-800                                  | 2,3-3                                            |
| Gebirgsbahnen     | 42-47                    | 58-68          | 6-8          | 1,1-1,4           | 3,1-4,1   | 110-140                | 800-1000                                 | 1,5-2,3                                          |

Es ist ein nach den Bahnverhältnissen möglichst langer Radstand zu empfehlen; jedoch ist für Bahnen, welche in freier Bahn vielfach Kurven enthalten von:

240 bis 300 Meter Radius 3 Meter,

300 „ 360 „ „ 3,8 „

360 „ 460 „ „ 4,3 „

460 Meter „ 4,9 „

als Maximum des Standes der festen Axen zu empfehlen.

Die Breite der Lokomotiven soll an keiner Stelle mehr als 3,05 Meter betragen. Höhe des Schornsteins über Oberkante der Schienen nicht über 4,57 Meter.

2) Der Reibungskoeffizient der Räder auf den Schienen beträgt:

bei trockener Witterung . . =  $\frac{1}{3}$ ,

„ gewöhnlicher Witterung =  $\frac{1}{6}$ ,

„ Schnee und Regen . . . =  $\frac{1}{10}$ .

3) Der Widerstand eines Zuges beträgt pro Tonne (à 20 Ctr.) seines Gewichtes bei einer Geschwindigkeit von  $v$  Meilen in der Stunde auf horizontaler Bahn:

$$9 + 0,15 v^2 \text{ Pfund.}$$

Bei schlechtem Material und bei Seitenwinden wächst der Widerstand um 50 bis 80 %.

Durchschnittlich kann man den Widerstand eines Zuges auf horizontaler Bahn annehmen:

bei mässiger Fahrgeschwindigkeit  $\frac{1}{200}$  } seines Gewichtes.  
 „ grosser „  $\frac{1}{100}$  }

Bei  $\frac{1}{n}$  Steigung nimmt der Widerstand um  $\frac{1}{n}$  des Gewichtes vom Zuge zu.

4) Die Belastung einer Axe soll 260 Centner (incl. Axe) als Maximum nicht überschreiten.

Die Belastung der Vorderaxe bei 3axigen Personenzug-Lokomotiven betrage mindestens  $\frac{1}{4}$  des Maschinen-Gewichts. Ist die Hinteraxe Laufaxe, so erhält diese nicht unter  $\frac{1}{6}$  des Lokomotiven-Gewichts. Eine gleiche Vertheilung der Last auf die gekuppelten Axen wird empfohlen.

#### Wagen.

1) Der Radstand betrage im Maximum für Bahnen, welche in freier Bahn vielfach Kurven enthalten, von:

|                          |             |
|--------------------------|-------------|
| 240 bis 340 Meter Radius | 3,66 Meter, |
| 300 „ 360 „ „            | 4,57 „      |
| 360 „ 460 „ „            | 5,03 „      |
| 460 „ 600 „ „            | 5,5 „       |
| 600 Meter                | 7,32 „      |

Für Güterwagen ist in der Regel 3,06 Meter Radstand als Maximum anzusehen.

Der Durchmesser der Räder betrage mindestens 0,9 Meter.

2) Axen von bestem Eisen können bei einem Durchmesser in der Nabe von:

|             |             |
|-------------|-------------|
| 101 Millim. | mit 75 Ctr. |
| 114 „       | „ 100 „     |
| 127 „       | „ 130 „     |

Bruttolast im Maximum belastet werden.

Bei gussstählernen Axen können diese Belastungen um 30 % erhöht werden.

Für Personenwagen betrage der Axendurchmesser 114 Millim.

Entfernung der Mitten beider Axenschenkel = 1,9 bis 2,0 Meter.

|                                 |         |          |          |
|---------------------------------|---------|----------|----------|
| Stärke der Schenkel im Min.     | 67 Mm.  | 76 Mm.   | 82 Mm.   |
| für eine Bruttolast pro Axe von | 75 Ctr. | 100 Ctr. | 130 Ctr. |

Für gussstählerne Axen können diese Belastungen um 30 % erhöht werden.

Länge der Axenschenkel =  $1\frac{3}{4}$ - bis  $2\frac{1}{4}$ fachen Durchmesser.

3) Die normale Höhe des Mittelpunktes der Buffer über den Schienen 1,042 Meter. Horizontale Entfernung von Buffermitte zu Buffermitte 1,754 Meter.

4) Horizontale Entfernung der Nothketten 1,067 Meter. Nothketten, Zughaken und Buffer liegen in horizontaler Linie.

5) Güterwagen dürfen mit Einschluss der Schiebethüren, Tritte und vorspringenden Theile bis zur Höhe von 1,372 Meter über den Schienen die Breite von 2,745 Meter nicht überschreiten. In grösserer Höhe ist für den Kasten eine Breite von 3 Meter, für die vorspringenden Theile eine Breite von 2,897 Meter gestattet. Die Wagen sollen mit den höchsten Punkten ihres festen Oberbaues nicht mehr als 3,760 Meter über den Schienen hoch sein. Mittlere Höhe des Fussbodens 1,220 Meter.



# Kurvenlehre.

---

## Geometrie der Lage.

---

### Erklärung der Begriffe und Zeichen.

Der Punkt ( $\cdot$ ), die Gerade ( $—$ ), die Ebene ( $\square$ ), sind die einfachen Elemente der Geometrie der Lage.

Diese Elemente lassen sich zu zusammengesetzten Gebilden ( $I$ ) verbinden, indem man eines derselben als Träger ( $T$ ) eines Komplexes der anderen ansieht.

Jeder Punkt eines solchen Komplexes wirft nach einem andern beliebig anzunehmenden Punkte einen Strahl, welcher der Schein des ersten Punktes heisst.

Der Schein des ganzen Komplexes ist der Inbegriff aller dieser Strahlen.

Die Gesammtheit aller in einer  $—$  liegenden  $\cdot \cdot$  heisst ein gerades Gebilde ( $\div$ ), ein von 2  $\cdot \cdot$  begrenzter Theil desselben eine Strecke ( $-f-f-$ ).

Die Gesammtheit aller durch einen  $\cdot$  gehenden und in ein und derselben Ebene liegenden Strahlen heisst ein Strahlenbüschel ( $\ast$ ).

Ein von 2 Strahlen begrenzter Theil desselben heisst ein vollkommener ebener Winkel ( $\angle$ ).

Vier Strahlen eines  $\ast$  enthalten 2 Paar getrennte Strahlen.

Die Gesammtheit aller durch eine — gehenden Ebenen heisst ein Ebenenbüschel ( $\{ \}$ ).

Ein von zwei Ebenen begrenzter Theil desselben heisst ein vollkommener Flächen-Winkel ( $Fl \angle$ ).

Die Gesammtheit aller Punkte und Strahlen, die in einer  $\square$  enthalten sind, heisst ein ebenes System.

Die  $\square$  ist T desselben.

Die Gesammtheit aller Strahlen und Ebenen, die durch einen  $\cdot$  im Raume denkbar sind, heisst ein Strahlenbündel.

#### Die Grundgebilde der I. Stufe

sind: Das gerade Gebilde, der Strahlenbüschel und der Ebenenbüschel.

#### Die Grundgebilde der II. Stufe

sind: Das ebene System und das Strahlenbündel.

#### Die Grundgebilde der III. Stufe

sind: Das räumliche System.

Jede — hat einen unendlich fernen Punkt.

Parallel-Linien ( $\parallel$ ) haben einen gemeinschaftlichen unendlich fernen  $\cdot$ .

Unter 4 Punkten eines  $\div$  sind nur 2 Paar getrennte.

Um den unendlich fernen  $\cdot$  einer — von ihren andern zu unterscheiden, werden erstere auch uneigentliche, letztere eigentliche  $\cdot \cdot$  genannt.

Von allen unendlich fernen  $\cdot \cdot \cdot$  einer Ebene wird angenommen, dass sie in einer unendlich fernen geraden Linie liegen.

Von allen unendlich fernen  $\cdot \cdot$  und  $—$  im Raum wird angenommen, dass sie in einer unendlich fernen  $\square$  liegen.

Zwei Grundgebilde heissen aufeinander bezogen, wenn jedem Elemente des einen ein Element des anderen zugewiesen ist.

Zwei solche Elemente heissen entsprechende oder homologe.

Wenn 2 Grund  $F$  auf ein 3tes bezogen sind, so sind sie auch auf einander bezogen.

Ein einfaches ebenes  $n$ -eck ist ein System von  $n \cdot \cdot \cdot$  einer  $\square$  und den  $n —$ , welche 2 aufeinander folgende  $\cdot \cdot$  verbinden.

Ein einfaches  $n$ -seit ist ein System von  $n —$  und den  $n \cdot \cdot$ , in denen je 2 aufeinander folgende sich schneiden.

Jedes  $n$ -eck oder  $n$ -seit besteht aus 2  $n$ -Elementen, nämlich Punkten und Geraden.

Das  $m^{\text{te}}$  und das  $n + m^{\text{te}}$  Element werden einander gegenüberliegend genannt.

Ein vollständiges ebenes  $n$ -eck ist ein System von  $n$ -Punkten der  $\square$  mit ihren sämtlichen Verbindungslinien (Seiten), d. h. ein einfaches  $n$ -seit mit allen Schnittpunkten der Seiten.

Als reciproke Begriffe stehen sich im Raume gegenüber:

|                  |     |                     |
|------------------|-----|---------------------|
| $\cdot$          | und | $\square$ ,         |
| $\div$           | „   | $[\cdot]$ ,         |
| $-f-f-$          | „   | $F \nless$ ,        |
| das ebene System | „   | der Strahlenbündel, |
| $—$              | „   | $\wedge$ .          |

Als reciproke Begriffe stehen sich in der Ebene gegenüber:

|                           |     |             |
|---------------------------|-----|-------------|
| $\cdot$                   | und | $—$ ,       |
| $\div$                    | „   | $\ast$ ,    |
| $-f-f-$                   | „   | $\nless$ ,  |
| ebenso im Strahlenbündel, |     |             |
| $—$                       | und | $\square$ , |
| $\ast$                    | „   | $[\cdot]$ . |

Jeder Satz aus der Geometrie der Lage findet seine Ergänzung in einem andern, den man aus dem ersten ableitet, indem man obige Ausdrücke mit einander vertauscht.

Dieses führt zur Bildung der nachfolgenden Doppelsätze.

Punkte werden durch grosse lateinische Buchstaben bezeichnet, Linien durch kleine, Ebenen durch griechische.

$\overline{AB}$  bezeichnet die durch die Punkte A und B bestimmte Linie;

$\overline{aB}$  die durch a und B bestimmte Ebene;

$\alpha\beta$  die durch  $\alpha$  und  $\beta$  bestimmte Gerade;

$\alpha\beta$  den durch  $\alpha$  und  $\beta$  bestimmten Punkt;

$\wedge$  heisst perspektivisch;

$\overline{\wedge}$  heisst projektivisch;

$\sim$  heisst ähnlich;

$\infty$  heisst unendlich;

$=$  heisst gleich.



## Fundamental-Sätze

Mit Hilfe der angeführten reciproken Begriffe lassen

### Doppel-

Zwei  $\cdot \cdot$   $A$  und  $B$  bestimmen eine  $\text{---}$   $AB$ , nämlich ihre Verbindungslinie.

Eine  $\text{---}$   $a$  und ein nicht auf ihr liegender  $\cdot$   $B$  bestimmen eine  $\square$   $aB$ , welche durch beide hindurch geht.

Drei  $\cdot \cdot$   $ABC$ , die nicht auf einer  $\text{---}$  liegen, bestimmen eine  $\square$   $\overline{ABC}$ .

Zwei  $\text{---}$ , die einen  $\cdot$  gemeinsam haben, liegen in einer  $\square$ .

Diesen Sätzen zu Folge ist die Lösung der folgenden

Durch zwei  $\cdot \cdot$  eine  $\text{---}$  zu legen.

Durch eine  $\text{---}$  und einen  $\cdot$  ausserhalb derselben eine  $\square$  zu legen.

Durch drei  $\cdot \cdot$  eine  $\square$  zu legen.

Durch zwei sich schneidende  $\text{---}$  eine  $\square$  zu legen.

Sind vier  $\cdot \cdot$   $ABCD$  gegeben und schneiden sich die Verbindungs  $\text{---}$   $\overline{AB}$  und  $\overline{CD}$ , so liegen die  $\cdot \cdot$  in einer  $\square$  und es schneiden sich auch die  $\text{---}$   $\overline{AC}$  und  $\overline{BD}$ , sowie  $\overline{AD}$  und  $\overline{BC}$ .

Wenn von beliebig vielen  $\text{---}$  je zwei sich schneiden, durch einen  $\cdot$  gehen, so liegen alle in einer  $\square$ .

## der Geometrie der Lage.

sich folgende Sätze aufstellen:

---

### Sätze.

---

Zwei  $\square \square \alpha$  und  $\beta$  bestimmen eine Gerade  $\overline{\alpha \beta}$ , nämlich ihre Schnittlinie.

Eine  $\text{---} a$  und eine nicht durch dieselbe hindurchgehende Ebene  $\beta$  bestimmen einen  $\bullet \alpha \beta$ , welcher auf beiden liegt.

Drei  $\square \square$ , die nicht durch eine  $\text{---}$  gehen, bestimmen einen  $\bullet$ .

Zwei Gerade, die in einer  $\square$  liegen, haben einen  $\bullet$  gemein.

---

Aufgaben stets als ausführbar zu betrachten:

Die Schnittlinie von zwei  $\square \square$  zu finden.

Von einer  $\square$  und einer nicht in ihr liegenden  $\text{---}$  den Schnitt  $\bullet$  zu finden.

Von drei  $\square \square$  den Schnitt  $\bullet$  zu finden.

Von zwei  $\text{---}$  in einer  $\square$  den Schnitt  $\bullet$  zu finden.

---

Sind vier  $\square \square \alpha \beta \gamma \delta$  gegeben und schneiden sich die Schnittlinien  $\overline{\alpha \beta}$  und  $\overline{\gamma \delta}$ , so gehen die  $\square \square$  durch einen und denselben  $\bullet$  und es schneidet sich auch  $\overline{\alpha \gamma}$  und  $\overline{\beta \delta}$ , sowie  $\overline{\alpha \delta}$  und  $\overline{\beta \gamma}$ .

aber nicht alle;

in einer  $\square$  liegen, so gehen alle durch einen  $\bullet$ .

Die Aufgabe: In einer  $\square$  durch einen in ihr ge-  
beider gegebene — schneidet, löst sich auf zweierlei

Entweder verbinde man den Schnittpunkt der —  
und der  $\square$  mit dem gegebenen •,

Auf diese Aufgabe lassen sich die folgenden Auf-

Durch einen gegebenen • eine — zu ziehen, welche  
zwei gegebene —, die mit dem • nicht in einer  $\square$  liegen,  
schneide.

Man lege nämlich durch den gegebenen • und eine  
der gegebenen — eine  $\square$ ,

so ist die Aufgabe auf die

Eine — zu ziehen, welche drei gegebene schneidet.

Man nehme in einer der — einen • an und suche  
nach den Angaben der vorigen Aufgabe eine —, welche  
diesen • geht.

Werden zwei ebene Systeme dadurch auf einander be-  
zogen, dass man sie als Schnitte eines und desselben  
Strahlenbündels betrachtet, so liegen je zwei einander  
entsprechende Elemente (• oder —) der Systeme auf  
einem und demselben Elemente (— oder  $\square$ ) des Strahlen-  
bündels. Die Schnittlinie der beiden  $\square$  fällt mit ihrer  
entsprechenden zusammen und entspricht sich selbst. Das-  
selbe gilt von jedem in dieser — befindlichen •. Die  
beiden Systeme haben also ein  $\div$  entsprechend gemein.

Je zwei • • einer  $\square$  bestimmen eine —.

Je zwei Strahlen eines Bündels bestimmen eine  $\square$ .

Eine Kurve kann

Als Inbegriff aller auf ihr liegenden • •.

Eine konische Fläche im Strahlen-

Als Inbegriff aller in ihr liegenden Strahlen.

**Sätze.**

gebenen  $\cdot$  eine — zu ziehen, welche eine ausserhalb Art:

oder man lege durch die — und den gegebenen  $\cdot$  eine  $\square$  und suche die Schnittlinie mit der gegebenen  $\square$ .  
gaben zurückführen:

In einer gegebenen  $\square$  eine — zu ziehen, welche zwei gegebene —, die mit der  $\square$  nicht einen und denselben Schnitt  $\cdot$  gemein haben, schneide.

Man bestimme nämlich den Schnitt  $\cdot$  der gegebenen  $\square$  mit einer der gegebenen —,  
vorangehende zurückgeführt.

Eine — zu ziehen, welche drei gegebene scheidet.

Man lege durch eine der — eine  $\square$  und suche nach den Angaben der vorigen Aufgabe eine —, welche in dieser Ebene liegt, und die beiden andern — scheidet.

Werden 2 Strahlenbündel dadurch auf einander bezogen, dass man sie als Scheine eines und desselben ebenen Systems betrachtet, so gehen je zwei entsprechende Elemente (— oder  $\square$ ) der Bündel durch ein und dasselbe Element ( $\cdot$  oder —) des ebenen Systems. Der gemeinsame Strahl der Bündel, welcher ihre Mittelpunkte verbindet, fällt mit seinem entsprechenden zusammen oder entspricht sich selbst. Dasselbe gilt von jeder durch diesen Strahl gehenden  $\square$ . Die beiden Strahlenbündel haben also einen  $[\square]$  entsprechend gemein.

Je zwei — einer  $\square$  bestimmen einen  $\cdot$ .

Je zwei  $\square$  eines Bündels bestimmen einen Strahl.  
aufgefasst werden:

Als Inbegriff aller sie einhüllenden Geraden (Tangenten).  
bündel kann aufgefasst werden:

Als Inbegriff aller sie einhüllenden Ebenen (Berührungsebenen).



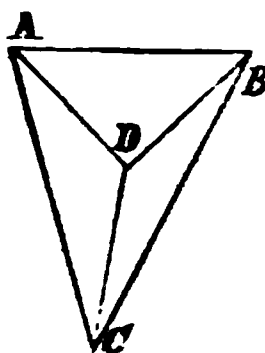
### Vollständiges ebenes $n$ eck.

In jedem Eckpunkte schneiden sich  $n - 1$  Seiten.

Die Anzahl aller Seiten ist  $= \frac{n(n-1)}{2}$ .

Jedes vollständige  $n$  eck oder  $n$  seit

Figur 1.



Ein vollständiges 4eck enthält 6 Seiten.

Darunter sind 3 Paar Gegenseiten, nämlich  $\overline{AB}$  und  $\overline{CD}$ ,  $\overline{AC}$  und  $\overline{BD}$ ,  $\overline{AD}$  und  $\overline{BC}$ .

Es enthält ferner 3 einfache 4ecke, nämlich  $ABCD$ ,  $ACDB$ ,  $ADBC$ .

Ein vollständiges  $n$  kant ist ein System von  $n$  Strahlen im Strahlenbündel mit ihren sämtlichen Verbindungsebenen.

Ein vollständiges räumliches  $n$  eck besteht aus  $n$  Punkten (Eckpunkten), den Geraden (Kanten), deren jede 2, und den Ebenen (Flächen), deren jede 3 der  $n$   $\cdot \cdot$  verbindet.

### Das Beziehen vollständiger $n$ ecke

#### Harmonische

Wenn 2 auf einander bezogene  $\triangle \triangle ABC$  und  $A, B, C$ , in verschiedenen  $\square \square$  liegen und je 2 entsprechende Seiten ( $\overline{AB}$  und  $\overline{A, B}$ ) sich schneiden, so bestimmen die Ebenen der 3 Paare entsprechender Seiten ein 3 kant, von welchem die beiden  $\triangle \triangle$  Schnitte sind. Die Verbindungslinien  $\overline{AA}$ ,  $\overline{BB}$ ,  $\overline{CC}$ , von 2 entsprechenden Eck  $\cdot \cdot$ , schneiden sich daher in einem  $\cdot$ , nämlich im Mittelpunkte (Spitze) der 3 kants.

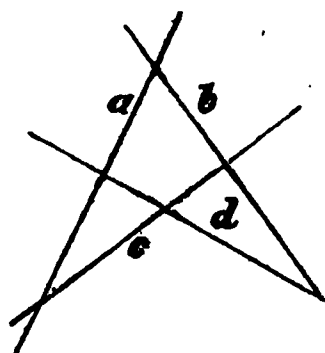
**Sätze.**

**Vollständiges ebenes  $n$  seit.**

Auf jeder Seite liegen  $n - 1$  Eckpunkte. Die Anzahl aller Eckpunkte ist  $= \frac{n(n-1)}{2}$ .

enthält mehrere einfache  $n$  ecke resp.  $n$  seite.

Figur 2.



Ein vollständiges 4 seit enthält 6 Eckpunkte. Darunter sind 3 Paar Gegenpunkte, nämlich  $a b$  und  $c d$ ,  $a c$  und  $b d$ ,  $a d$  und  $b c$ .

Ein vollständiges  $n$  seit im Strahlenbündel ist ein System von  $n$  Ebenen des letzteren, mit ihren sämtlichen Schnittlinien (Kanten).

Ein vollständiges  $n$  flach besteht aus  $n$   $\square$   $\square$ , den Geraden (Kanten), in denen je 2, und den  $\bullet$  (Eckpunkten), in denen je 3 der  $n$  Ebene sich scheiden.

**und  $n$  seite auf einander.**

**Gebilde.**

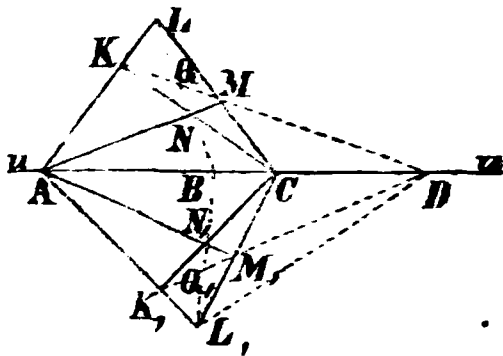
Wenn 2 auf einander bezogene 3 kante verschiedenen Strahlenbündeln angehören und je 2 entsprechende Kanten sich schneiden, so bestimmen die 3 Schnittpunkte ein  $\triangle$ , von welchem die 2 Dreikante Scheine sind. Die Schnittlinien von je 2 entsprechenden Ebenen der Dreikante liegen daher in der Ebene dieses  $\triangle$ , dessen Seiten sie sind.

Mit Hilfe des vorigen Satzes

Wenn 2 auf einander bezogene vollständige 4ecke in verschiedenen Ebenen liegen, deren Schnittlinie  $u$  durch keinen der 8 Eckpunkte geht und 5 Seiten des einen 4ecks die entsprechenden Seiten des andern (auf  $u$ ) schneiden, so sind beide 4ecke Schnitte ein und desselben vollständigen 4kants, daher auch das 6<sup>te</sup> Seitenpaar sich auf  $n$  schneidet.

Der Satz links bleibt auch gültig, wenn die  $\square$  der 4ecke unendlich ferne Linie.

Figur 3.



Demzufolge schneiden sich eines 4ecks KLMN in 4 Punk-

Die  $\cdot \cdot$  A B C D heissen harmonischen des vollständigen 4ecks.

Wird in einer anderen oder Gegenseiten durch 3 harmonischen das vierte Paar der Gegenseiten

Punkt A und C sind durch

Aus einem nicht in der  $\square$  des vollständigen Vier-4kant projecirt; die 4 harmonischen  $\cdot \cdot$  aber durch vier Jede durch das 4kant gelegte  $\square$  schneidet dasselbe in denselben 4  $\cdot \cdot$  scheiden sich aber auch die Gegenseiten

Sie sind daher harmonische  $\cdot \cdot$ . Es wird daher jeder gehende  $\square$  oder  $—$  in 4 harmonischen  $\cdot \cdot$  geschnitten.

Werden 4 harmonische  $\cdot \cdot$  aus einer Axe projecirt, so die nicht durch die Axe geht, scheidet zu Folge des

Vier harmonische  $\cdot \cdot$  werden aus jeder  $—$  durch 4 harmonische  $\square \square$  und aus jedem  $\cdot$  durch 4 harmonische Strahlen projecirt.

---

**Sätze.**


---

ergibt sich der nachfolgende:

Wenn 2 auf einander bezogene vollständige 4seite verschiedenen Strahlenbündeln angehören, deren gemeinschaftlicher Strahl in keiner der 8 Seiten liegt, und 5 Kanten des einen 4seits die entsprechenden Kanten des anderen schneiden, so sind beide 4seite Scheine eines und desselben vollständigen ebenen 4seits, daher auch ihre übrigen Kanten sich schneiden.

zusammenfallen oder  $\parallel$  sind, im letzten Falle ist u eine

die Seiten  $\overline{KL}$  und  $\overline{NM}$ ,  $\overline{KN}$  und  $\overline{LM}$ ,  $\overline{LN}$  und  $\overline{KM}$  ten A B C D einer Geraden u.

monische Punkte, in ihnen schneiden sich also die Gegen-

derselben  $\square$  ein zweites 4eck konstruiert, wovon 3 Paar sche Punkte (A B C) gehen, so muss zu Folge des Vorigen sich in dem vierten harmonischen Punkt (D) schneiden.

B und D harmonisch getrennt.

ecks belegen • wird dasselbe durch ein vollständiges Strahlen, die ein harmonisches  $\ast$  genannt werden. einem Viereck und die harmonischen  $\ast$  in 4 • • . In des 4ecks.

harmonische  $\ast$  durch jede nicht durch seinen Mittel •

entsteht ein harmonisches Ebenenbüschel. Jede Ebene, vorigen die 4 harmonischen  $\square \square$  in harmonischen Strahlen.

Vier harmonische  $\square \square$  werden von jeder — in 4 harmonischen • • und von jeder  $\square$  in 4 harmonischen Strahlen geschnitten.

Vier harmonische  
aus jedem  $\cdot$  durch 4 harmonische  $\square \square$  projecirt.

Aufgabe. Zu 3 harmonischen Elementen das 4<sup>te</sup>  
Sind die Elemente  $\cdot \cdot$ , so konstruire man das zu-  
oder Ebenen eines Büschels, so schneide man  
den 4<sup>ten</sup> harmonischen  $\cdot$ .

Werden 3  $\square \square \alpha \beta \gamma$  eines  $[ ]$  von beliebigen Trans-  
versalen geschnitten, und wird zu den 3 Schnitt  $\cdot \cdot$  der  
4<sup>te</sup> harmonische  $\cdot$  gesucht, so liegen alle diese 4<sup>ten</sup>  $\cdot \cdot$  in  
einer  $\square \delta$ , welche zu  $\alpha \beta \gamma$  die harmonische ist.

Ist A B C D ein harmonisches Gebilde, so sind nicht  
sondern auch D C B A, D A B C, B C D A und B A D C.

Dasselbe gilt für harmonische Strahlen und Ebenen.

Durch 2 — (a und b) und einen  $\cdot$  ausserhalb 1, ist  
eine dritte — bestimmt, welche durch den Schnittpunkt  
o geht und jeden  $\cdot$  (3) enthält, welcher durch die ge-  
gebene — a und b von  $\cdot$  1 harmonisch getrennt ist.  
Diese dritte — ist nämlich der harmonische Gegenstrahl  
von 1.0 Figur 4.

Im vollständigen ebenen 4eck sind je 2 Gegenseiten  
( $\overline{KM}$  und  $\overline{LN}$ ) durch die beiden  $\cdot \cdot$  (A und C), in denen  
die übrigen Gegenseiten paarweise sich schneiden, har-  
monisch getrennt. Figur 3.

Wenn in einer — 2  $\cdot \cdot$  A und C (Figur 3) von  
4 harmonische  $\cdot$  auf dieser Geraden in unendlicher

---

**Sätze.**


---

Strahlen werden

von jeder  $\square$  in 4 harmonischen  $\cdot \cdot$  geschnitten.

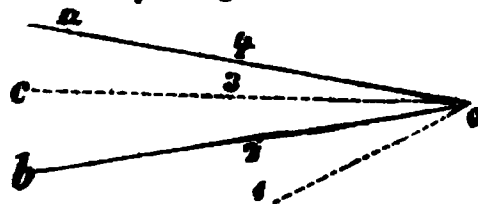
zu finden:

gehörige vollständige 4eck, sind sie dagegen Strahlen denselben durch eine — und suche zu den 3 Schnitt  $\cdot \cdot$

Werden 3  $\cdot \cdot \cdot$  A B C eines  $\div$  aus beliebigen Axen projecirt und wird für jede Axe zu den 3 projecirenden  $\square$   $\square$  die 4<sup>te</sup> harmonische gesucht, so gehen alle diese 4<sup>ten</sup> Ebenen durch einen  $\cdot$  D, welcher zu A B C harmonisch ist.

nur A D C B, C B A D und C D A B ebenfalls solche,

Figur 4.



Durch eine — b und zwei  $\cdot \cdot$  ausserhalb (1 und 4) ist ein dritter  $\cdot$  (3) bestimmt, welcher auf der Verbindungsline von  $\cdot$  1 und 4 liegt und durch welchen jede — (c) geht, welche durch die gegebenen Punkte von der gegebenen — (b) harmonisch ist.

Im vollständigen ebenen 4seit sind je 2 Gegen  $\cdot \cdot$  (A und C) durch die beiden — ( $\overline{KM}$  und  $\overline{LN}$ ), welche die übrigen Gegen  $\cdot \cdot$  paarweise verbinden, harmonisch getrennt.

einem dritten B gleichen Abstand haben, so liegt der Entfernung und der Strahl zu diesem  $\cdot$  ist  $\parallel$  der —.

Zwei Seiten eines  $\triangle$ , die die Grundlinie halbirende Grundlinie sind daher harmonische Strahlen. (a. b. c. d.)

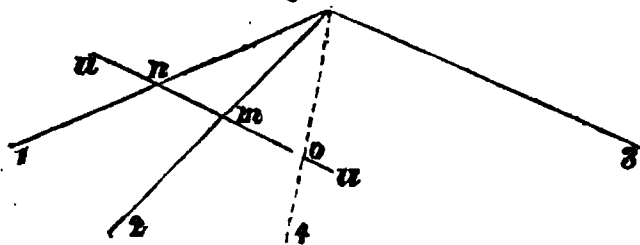
Im gleichschenkeligen  $\triangle$  steht b senkrecht auf der bildeten Neben  $\angle$  durch b und d halbt. Daraus folgt:

Die Halbierungslinien zweier Neben  $\angle$  sind durch Umgekehrt werden, wenn von 4 harmonischen Strahlen den andern beiden Strahlen halbt.

Wird ein harmonischer Strahlenbüschel a b c d durch halbt von den 3 Schnittpunkten mit den übrigen Strah-

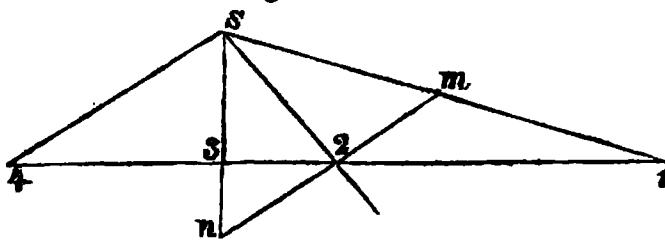
Aufgabe. Zu 3 . . oder Strahlen den 4ten

Figur 5.



Sind die gegebenen  $nm = mo$  und ziehe

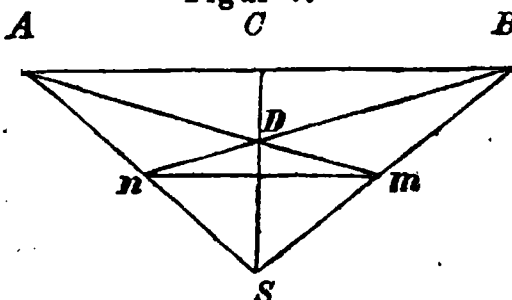
Figur 6.



Sind die gegebenen kührlich durch 2, so ist . 4 der ge-

Aufgabe. Zu der Geraden AB

Figur 7.



Man halbire  $\overline{AB}$  in C und  
Man ziehe ferner nB beliebig  
Soll die || durch einen be-  
längerung von A n anzuneh-

---

**Sätze.**


---

Transversale und die durch die Spitze gehende  $\parallel$  zur Grundlinie und auf d, auch werden die von a und c ge-  
 die Schenkel derselben harmonisch getrennt.  
 2 getrennte senkrecht auf einander stehen, die  $\angle$  zwischen  
 eine Parallele u zu einem seiner Strahlen geschnitten, so  
 len der eine der Abstand zwischen den beiden ändern.  
 harmonischen zu finden. Figur 5 und 6.

Elemente Strahlen 1. 2. 3., so lege man u  $\parallel$  s 3, mache  
 s 4, so ist dieses der gesuchte Strahl.

Elemente . . 1. 2. 3., so ziehe man m.n, Figur 6, will-  
 mache  $2m = 2n$  und bestimme . s. Zieht man s 4  $\parallel$  m n,  
 suchte Punkt.

eine  $\parallel$  zu ziehen. Figur 7.

ziehe von einem beliebigen . S die Strahlen  $\overline{AS}$ ,  $\overline{CS}$ ,  $\overline{BS}$ .  
 und Am durch . D, so ist n m  $\parallel$   $\overline{AB}$ .  
 stimmten . n gehen, so ist S willkürlich in der Ver-  
 men, n B dagegen durch die . . n und B bestimmt.

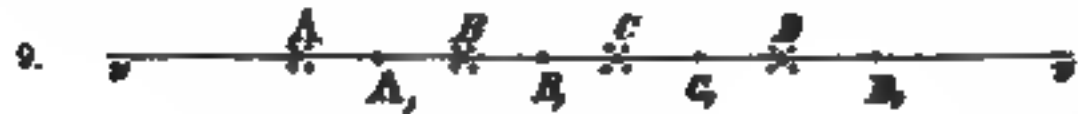


Figur 8.

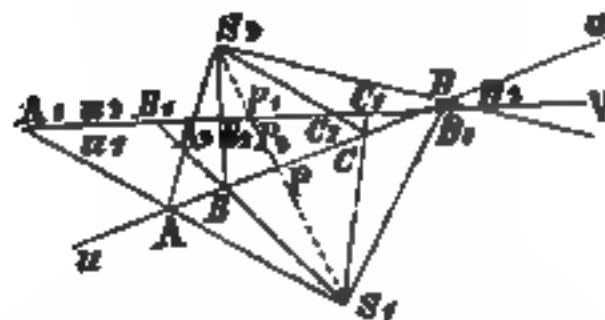
Zwischen den Abschnitten  $\overline{B}$   $\overline{C}$   $\overline{B}$  einer — gebildet werden,  $A C$  ist durch den in ihr gelegenen Punkt  $B$  in von  $B$  harmonisch getrennt ist.

### Projektivische Verwandtschaft

zwei ungleichartige Grundgebilde liegen  $\wedge$ , wenn das eine  $\wedge$  liegt, wenn sie entweder Schnitte oder Scheine von Grundgebilde sind  $\overline{\wedge}$ , wenn sie so auf einander harmonischen Elementen des andern entsprechen. Wenn 2 Gebilde zu einem 3ten  $\overline{\wedge}$  sind, so sind sie zwei gleichartige  $\overline{\wedge}$  Grundgebilde können auch in einem geraden Gebilde  $A B C D$  und  $A, B, C, D$ , (Figur 9).



Figur 11.



und in einer  $\square$  zwei  $\ast$   $S_1$  und  $S_2$  (Figur 10) gegeben, welche Scheine eines und desselben  $\div u$ , also  $\wedge$ , und schneidet man dieselben durch eine —  $v$ , so man in dieser 2  $\wedge$  gerade Gebilde  $u_1$  und  $u_2$ ,

**Sätze.**

ten (Figur 8), welche durch vier harmonische Punkte auf besteht die Proportion  $AB : CB = AD : DC$ , d. h. die eben dem Verhältniss getheilt, wie durch den äusseren  $\cdot D$ ,

**zwischen einförmigen Grundgebilden.**

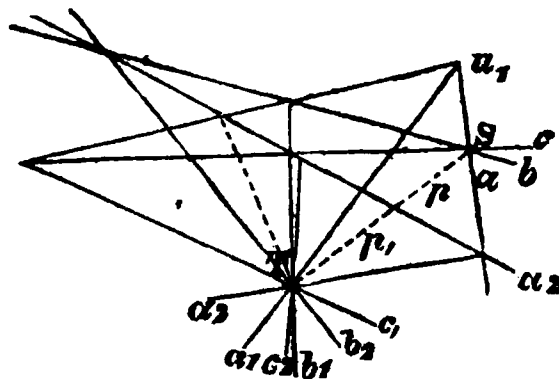
eine ein Schnitt des andern ist; zwei gleichartige Grund- ein und desselben dritten Grundgebildes sind.

bezogen sind, dass je 4 harmonische Elemente des einen

auch zu einander  $\overline{\wedge}$ .

einander liegen, so dass sie denselben Träger haben, wie welche die Gerade  $v$  zum Träger haben.

Figur 10.



Sind in einer  $\square$  zwei  $\div u_1$  und  $u_2$  (Figur 11) gegeben, welche Schnitte eines und desselben  $\clubsuit S$ , also perspektivisch sind, und projectirt man dieselbe aus einem  $\cdot T$  der  $\square$ , so wird dieser der Mittel  $\cdot$  von 2  $\overline{\wedge}$  Strahlen-

welche die beiden Schnitt  $\cdot \cdot$  von  $v$  mit  $u$  und mit  $\overline{S_1 S_2}$  entsprechend gemein haben. Diese beiden  $\cdot \cdot$  fallen zusammen, wenn  $\overline{S_1 S_2}$  durch  $u v$  geht.

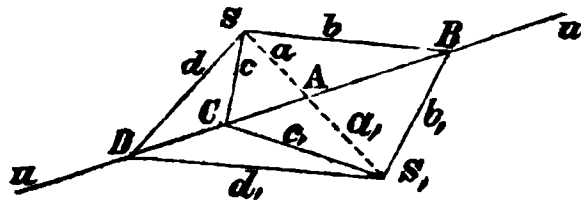
In den Figuren sind  $A_1$  und  $A_2$ ,  $B_1$  und  $B_2$ ,  $C_1$  und  $C_2$  entsprechende  $\cdot \cdot$ ,

Wenn 2  $\overline{\wedge}$  einförmige Grundgebilde 3 Elemente entsprechend gemein und sind also identisch mit einander.

Zwei  $\overline{\wedge}$  einförmige Grundgebilde können daher höchst nicht zusammenfallen sollen.

Wenn ein  $\div$  zu einem Büschel, oder ein Strahlen des ersten Gebildes in den ihnen entsprechenden Elementen des letzteren.

Figur 12.



Wenn 2  $\overline{\wedge}$  Strahlenbüschel  $S$  und  $S'$  (Figur 12), welche in einerlei  $\square$  liegen, aber nicht konzentrisch sind, den Strahl  $a$  oder  $a'$ , welcher ihre Mittelpunkte verbindet, entsprechend gemein haben, so sind sie Scheine ein und desselben  $\div$   $u$  und somit  $\overline{\wedge}$ . Denn verbindet man  $B$  und  $C$  durch eine  $—$ , so sind die beiden  $\div$ , in welchen  $u$  die beiden Büschel schneidet, identisch, weil sie  $\overline{\wedge}$  sind und 3  $\cdot \cdot$  entsprechend gemein haben.

Wenn 2  $\overline{\wedge}$   $[ ]$ , deren Axen sich schneiden, die Verbindungs  $\square$  dieser Axen entsprechend gemein haben, so sind sie Scheine ein und desselben  $\ast$  und daher  $\overline{\wedge}$ .

**Sätze.**

büscheln, welche die beiden Verbindungslinien von T mit S und mit  $u_1$   $u_2$  entsprechend gemein haben. Diese beiden Strahlen fallen zusammen, wenn  $u_1$   $u_2$  auf  $\overline{ST}$  liegt.

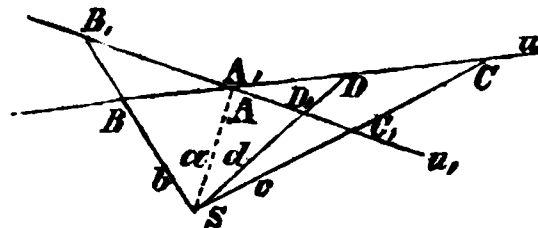
$a_1$  und  $a_2$ ,  $b_1$  und  $b_2$ ,  $c_1$  und  $c_2$  entsprechende Strahlen.

sprechend gemein haben, so haben sie alle ihre Elemente

stens 2 Elemente entsprechend gemein haben, wenn sie

büschel zu einem Ebenenbüschel  $\overline{\wedge}$  ist und 3 Elemente des letzteren liegen, so ist das erste Gebilde ein Schnitt

Figur 13.



Wenn 2  $\overline{\wedge} \div$  Gebilde  $u$  und  $u_1$  (Figur 13), welche sich schneiden, ihren Schnittpunkt  $A$  oder  $A_1$ , entsprechend gemein haben, so sind sie Schnitte ein und desselben  $\clubsuit S$  und somit perspektivisch. Denn verbindet man  $B_1$  und  $B$ , sowie  $C_1$  und  $C$ , und schneiden sich diese — in  $S$ , so sind die beiden  $\clubsuit$ , durch welche aus  $S$  die  $\div u$  und  $u_1$ , projectirt werden, identisch, weil sie  $\overline{\wedge}$  sind und 3 Strahlen gemein haben.

Wenn 2  $\overline{\wedge} \clubsuit$ , welche konzentrisch sind, aber in verschiedenen  $\square$  liegen, die Schnittlinie dieser  $\square$   $\square$  entsprechend gemein haben, so sind sie Schnitte ein und desselben  $\square$  und daher  $\overline{\wedge}$ .

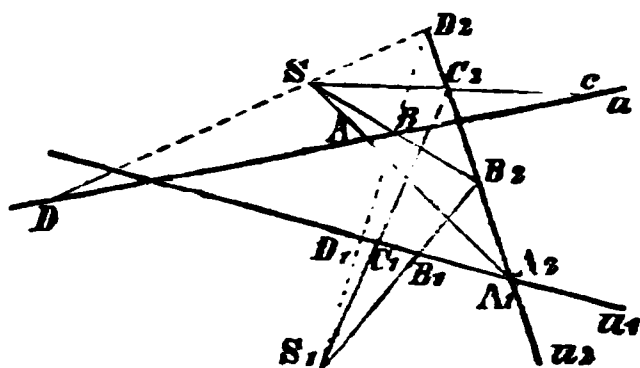
Wenn 2  $\overline{\wedge} \clubsuit S$  und  $S$ , (Figur 12) verschiedene Mittelpunkte haben, und irgend 3  $| bcd$  des einen von denen ihnen entsprechenden  $b, c, d$ , des andern in 3  $\cdot \cdot BCD$  geschnitten werden, welche auf einer  $— u$  liegen, so sind die  $\clubsuit$  Scheine des  $\div u$  also  $\wedge$  und alle Schnittpunkte von je zwei entsprechenden  $|$  liegen auf  $u$ .

Zwei  $\overline{\wedge} \clubsuit$ , welche schief in einer  $\square$  liegen, schneiden einander in einer Kurve  $\Pi^{\text{ter}}$  Ordnung, indem jeder Strahl des einen Büschels den entsprechenden des andern Büschels in einem  $\cdot$  dieser Kurve schneidet.

In keiner  $—$  liegen mehr wie 2  $\cdot \cdot$  einer Kurve  $\Pi^{\text{ter}}$  Ordnung.

Zwei einförmige Grundgebilde können stets in solcher 3 Elementen des einen 3 beliebige Elemente des andern kann dann das entsprechende des andern Gebildes ein-

Figur 14.



Da  $u, \wedge$  zu  $u_2$  und  $u_2 \wedge$  zu  $u$  ist, so geht hieraus Erstes und Letztes in einer Reihe von Gebilden betrachtet vorhergehenden  $\wedge$  liegt.

---

**Sätze.**


---

Wenn 2  $\overline{\wedge} \div u$  und  $u$ , in verschiedenen — liegen und irgend 3 von den |, deren jeder ein Paar entsprechender  $\cdot \cdot$  B und B<sub>1</sub>, C und C<sub>1</sub>, D und D<sub>1</sub>, verbindet, sich in einem und demselben  $\cdot$  S schneiden, so sind die  $\div u$  und  $u$ , Schnitte des  $\clubsuit$  S, also  $\wedge$ , und alle Verbindungslinien von 2 entsprechenden | gehen durch S.

Zwei  $\overline{\wedge} \div$ , welche schief in einer  $\square$  liegen, projeciren einander durch einen  $\clubsuit$  II<sup>ter</sup> Ordnung, indem jeder  $\cdot$  des einen den entsprechenden  $\cdot$  des andern  $\div$  durch einen | dieses  $\clubsuit$  projecirt.

Durch keinen  $\cdot$  gehen mehr als 2 | eines  $\clubsuit$  II<sup>ter</sup> Ordnung.

Weise  $\overline{\wedge}$  auf einander bezogen werden, dass man irgend Grundgebildes zuweist; zu jedem 4<sup>ten</sup> Elemente des einen deutlich bestimmt werden.

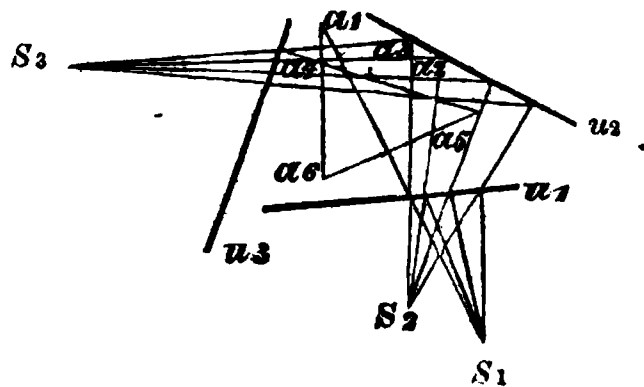
Sollten z. B. die  $\div u$  und  $u$ , so auf einander bezogen werden, dass den 3  $\cdot \cdot$  A B C die  $\cdot \cdot$  A, B, C, zugewiesen werden, so projecire man  $u$  aus einem in  $\overline{AA}$ , belegenden  $\cdot$  S auf  $u_2$ . Es müssen sich alsdann  $\overline{C}, \overline{C}_2$ , B, B<sub>2</sub>, sowie alle andern Verbindungslinien von je 2 entsprechenden  $\cdot \cdot$ , in S, schneiden, weil  $u$ , mit  $u$ ,  $\wedge$  ist, da beide den Schnittpunkt  $u, u_2$  mit A, gemein haben. Der entsprechende  $\cdot$  von D auf  $u$ , wird gefunden, indem man D aus S nach  $u_2$  projecirt und die Gerade D<sub>2</sub> S, zieht. Ihr Durchschnits  $\cdot$  mit  $u$ , ist der entsprechende  $\cdot$  D.

hervor, dass 2  $\overline{\wedge}$  einförmige Grundgebilde immer als werden können, deren jedes zu dem folgenden und dem

Wird ein  $\div$  durch Bewegung eines seiner  $\cdot \cdot P$  beschrieben, so durchläuft der entsprechende  $\cdot P$ , auf einem andern  $\div$  einen entsprechenden Weg. Diese Wege haben in beiden Gebilden entweder gleiche oder entgegengesetzte Richtung. Im ersten Falle heissen die Gebilde „ein-stimmig  $\overline{\wedge}$ “, im zweiten Falle „ent-gegengesetzt  $\overline{\wedge}$ “.

Da im entgegengesetzten  $\overline{\wedge}$  Gebilde die sich bemüssen, so haben dieselben 2 Elemente entsprechend ge-entsprechenden  $-f-f-$  oder  $\times$  des andern liegt. Die-entsprechend gemein.

Figur 15.

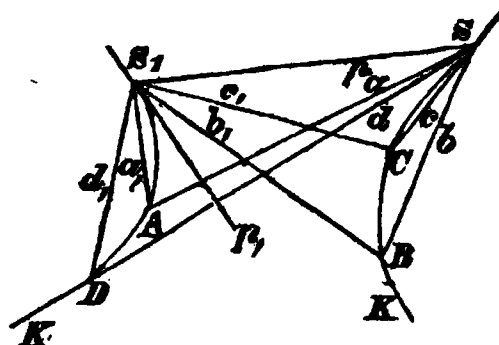


Drehen sich die Seiten  $a_1 a_2 \dots a_n$  eines veränderlichen einfachen necks der Reihe nach um  $n$  feste  $\cdot \cdot S_1 S_2 \dots S_n$ , während  $n-1$  Eckpunkte  $\dot{a}_1 a_2 \dot{a}_2 a_3 \dots \dot{a}_{n-1} a_n$  desselben sich auf die festen  $— u_1 u_2 \dots u_{n-1}$  bewegen, so beschreibt der letzte Eckpunkt  $\dot{a}_n a_1$  und jeder andere Schnittpunkt der Seiten des necks entweder eine Kurve  $l^{ter}$  Ordnung oder eine  $—$ , und zwar eine Gerade u. A. dann, wenn die festen Drehpunkte  $S_1 S_2 \dots$  alle auf einer  $—g$  liegen.

Die Seiten  $a_1 a_2 \dots$  beschreiben nämlich um  $S_1 S_2 \dots$  Strahlenbüschel, von denen jeder zu dem Folgenden  $\wedge$  liegt, Figur 15.

**Sätze.**

Zwei auf einander bezogene  $\otimes$  oder  $[\ ]$  können daher einstimmig oder entgegengesetzt  $\overline{\wedge}$  sein, je nachdem der Drehsinn in beiden = oder entgegengesetzt ist.

**Figure 16**

90

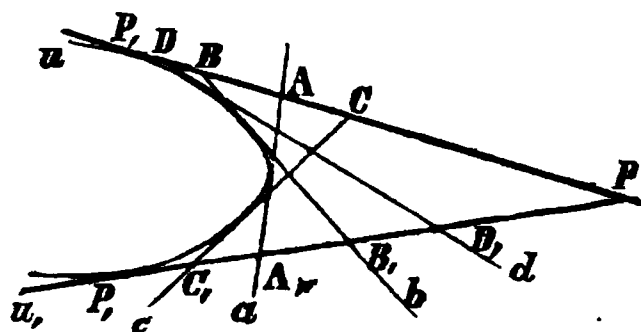


Folglich sind je 2 dieser Büschel und namentlich der erste und letzte  $\overline{\wedge}$ , und erzeugen eine Kurve  $\Pi^{\text{ter}}$  Ordnung, wenn sie nicht etwa  $\wedge$  liegen; dieser Fall tritt u. A. ein, wenn  $S_1 S_2 \dots S_n$  auf einer — g liegen.

### Kurven, Büschel und Kegel-

Wenn 2  $\overline{\wedge}$   $[ ]$ , deren Axen sich schneiden, nicht  $\wedge$  liegen, so bilden die sämtlichen Schnittlinien entsprechender  $[ ]$  eine Kegelfläche  $\Pi^{\text{ter}}$  Ordnung, welche mit keiner  $[ ]$  mehr als 2 dieser Schnittlinien gemein hat. Der Schnittpunkt der Axen, durch welchen alle solche Strahlen der Kegelfläche hindurchgehen, heisst der Mittelpunkt derselben.

Figur 17.



In Figur 17 liefern die  $\cdot \cdot$  A B C D und A, B, C, D, Ebenen O a, O b, O c, O d, den  $[ ]$   $\Pi^{\text{ter}}$  Ordnung bilden.

Jede Kurve und jeder  $\ast$   $\Pi^{\text{ter}}$  Ordnung wird aus einem nicht in derselben  $[ ]$  gelegenen  $\cdot$  durch eine Kegelfläche resp. einen  $[ ]$   $\Pi^{\text{ter}}$  Ordnung projecirt.

---

**Sätze.**


---

Folglich sind je 2 dieser Gebilde und also auch das erste und letzte  $\overline{\wedge}$ , und erzeugen einen Büschel  $\Pi^{\text{ter}}$  Ordnung, wenn sie nicht etwa  $\wedge$  liegen. Dieser letzte Fall tritt u. A. ein, wenn die  $\div u_1 u_2 \dots u_1$  sich in einem  $\bullet P$  schneiden.

---

**flächen  $\Pi^{\text{ter}}$  Ordnung.**

Wenn 2  $\overline{\wedge} \clubsuit$ , deren  $\square \square$  sich schneiden, konzentrisch, aber nicht  $\wedge$  liegen, so bilden die sämtlichen Verbindungsebenen entsprechender Strahlen einen  $[|]$   $\Pi^{\text{ter}}$  Ordnung, welcher mit keinem  $[|]$   $\Pi^{\text{ter}}$  Ordnung mehr als 2  $\square \square$  gemein hat. Der Mittel  $\bullet$  der  $\clubsuit$ , durch welchen alle  $\square$  des Büschels  $\Pi^{\text{ter}}$  Ordnung hindurchgehen, heisst der Mittel  $\bullet$  dieses  $[|]$ .

Die Richtigkeit dieses Doppelsatzes erhellt sofort, wenn man Figur 16 und 17 aus einem nicht in der  $\square$  der Figuren belegenen  $\bullet$  z. B. dem Auge projecirt.

In Figur 16 liefern die  $\clubsuit$  S und  $S_1$  aus einem solchen  $\bullet O$  projecirt die  $\wedge$   $[|]$ . Die  $— A O, D O$  u. s. w. sind dann die Schnittlinien der  $\square \square$  und zugleich die Strahlen der Kegelfläche, deren Mittel  $\bullet O$  ist.

aus  $O$  projecirt die konzentrischen  $\clubsuit$ , während die

Jede Kegelfläche und jeder  $[|]$   $\Pi^{\text{ter}}$  Ordnung wird von einer nicht durch den Mittel  $\bullet$  gehenden  $\square$  in einer Kurve resp.  $\clubsuit$   $\Pi^{\text{ter}}$  Ordnung geschnitten.

Dem gemeinschaftlichen  $\frac{1}{2} p$  (Figur 16) von  $2 \overline{\wedge}$  entspricht die Tangente  $p$ , derjenigen Kurve  $\Pi^{\text{ter}}$  Ordnung in welcher die Büschel sich schneiden.

Zwei  $\wedge$  \* S und S, seien durch 3 Paar e  
sprechender | a a., b b., c c, gegeben; es sollen  
liebig viele . . der Kurve II<sup>ter</sup> Ordnung, in welc  
sich die | schneiden, konstruiert werden.

**Figure 18.**

---

**Sätze.**


---

Der Strahlenbüschel  $K$   $\Pi^{\text{ter}}$  Ordnung (Figur 17) enthält auch die —  $u$  und  $u_1$ , in welcher die  $\div$  liegen. Denn dem Schnittpunkt  $P$  von  $u$  und  $u_1$  entspricht, weil die  $\div$  nicht  $\wedge$  liegen sollen, irgend ein anderer  $\cdot P$ , im  $\div u u_1$ , die Verbindungslinie  $\overline{PP_1}$ , d. h.  $u$ , gehört also dem Büschel  $K$  an.

Dem Schnitt  $\cdot P$  von  $2 \wedge \div$  (Figur 17) entspricht in jedem derselben ein Berührungspunkt desjenigen Büschels  $\Pi^{\text{ter}}$  Ordnung, durch welchen die  $\div$  einander projeciren.

**Aufgabe.**

Zwei  $\div u u_1$ , seien durch 3 Paar entsprechender  $\cdot \cdot A A_1, B B_1, C C_1$  gegeben; es sollen beliebig viele  $|$  des Büschels  $\Pi^{\text{ter}}$  Ordnung, durch welches die  $\div$  einander projeciren, konstruirt werden.

Figur 19.

Durch den Schnittpunkt  $a$ , von irgend 2 entsprechenden  $\clubsuit S$  und  $S$ , lege man die  $— u$  und  $u$ , den  $\clubsuit S$  in einem  $— A B C$  und  $u$ , den inem  $\div A, B, C$ , schneide. Als Schnitte  $\bigwedge$   $—$  auch zu einander  $\bigwedge$ . Sie liegen aber in ihrem Schnittpunkte 2 entsprechende  $\cdot \cdot$  zusammenfallen. Sie sind daher Schnitte des  $S_2$ , in dessen Mittel  $\cdot$  die  $| \overline{B B}, \overline{C C}$ , sich Figur 18.]

irgend einem  $| d$  des Büschels  $S$  den entd, von  $S$ , zu finden, projecirt man den aus  $S_2$  nach  $D$ , und zieht  $D, S$ . Dieses ist  $| d$  und  $\cdot d d$ , oder  $P$  ein  $\cdot$  der Kurve  $k$ .

Hiermit sind folgende  
em  $|$  von  $S$  oder  $S$ , den zweiten von  $S$  und  $S$ ,  
n Schnitt  $\cdot$  mit  $k$  zu finden.

Mittel  $\cdot \cdot$  von 2  $\bigwedge \clubsuit$  Tangenten  $p$  und  $p$ ,  
ler von ihnen erzeugten Kurve  $\Pi^{\text{ter}}$  Ordnung

end einer  $— u$ , welche eine Kurve  $K$  (Figur  
em gegebenen  $\cdot A$  schneidet, den zweiten  
t  $M$  mit  $k$  zu finden

satz des Pascal.

m einfachen Seck, welches einer Kurve  $\Pi^{\text{ter}}$   
ngeschrieben ist, schneiden sich die Gegen-  
Punkten einer Geraden.

i Figur 18 ist  $S P S, M A L$  das Seck,  $L P$  und  
nd  $A L$ ,  $S, M$  und  $S, L$ , die Gegenseiten und  
Schnitt  $\cdot \cdot$ .

irve  $\Pi^{\text{ter}}$  Ordnung wird aus beliebigen 2 ihrer  
h 2  $\bigwedge \clubsuit$  projecirt.

---

**Sätze.**


---

In der Verbindungs —  $AA$ , von irgend 2 entsprechenden  $\cdot \cdot$  der  $\wedge \div u$  und  $u$ , (Figur 19) nehme man die Mittel  $\cdot \cdot$   $S$  und  $S$ , von 2  $\clubsuit$  an, von denen  $S$  das  $\div ABC$  und  $S$ , das  $\div A, B, C$ , projecire. Als Scheine  $\overline{\wedge} \div$  sind die  $\clubsuit$   $S$  und  $S$ , auch zu einander  $\overline{\wedge}$ . Sie liegen aber auch  $\wedge$ , weil in der Verbindungslinie  $SS$ , ihrer Mittel  $\cdot \cdot$  2 entsprechende  $| a$  und  $a$ , zusammenfallen. Sie sind also Scheine desjenigen  $\div$ , welchem die Schnitt  $\cdot \cdot$   $b b, c c$ , angehören.

Um zu irgend einem  $\cdot D$  von  $u$  den entsprechenden  $\overline{D}$ , von  $u$ , zu finden, schneide man die —  $\overline{DS}$  oder  $d$  durch  $u_2$  und projecire den Schnitt  $\cdot$  aus  $S_2$  durch den Strahl  $d$ , auf  $u$ . Die Projektion  $\overline{d}, u$ , ist der gesuchte  $\cdot D$ . Der  $| DD$ , gehört zu dem Büschel  $\Pi^{\text{ter}}$  Ordnung  $k$ . Aufgaben gelöst:

Durch jeden  $\cdot$  von  $u$  oder  $\overline{u}$ , den zweiten von  $u$  oder  $u$ , verschiedenen Strahl des Büschels  $K$  zu finden.

Auf 2  $\overline{\wedge} \div$ , die einen Büschel  $\Pi^{\text{ter}}$  Ordnung erzeugen, die Berührungs  $\cdot \cdot F$  (Figur 19) zu finden.

Durch irgend einen  $\cdot S$ , welcher auf einem gegebenen Strahl des Büschels  $K$  (Figur 19) liegt, den zweiten Strahl  $q$  dieses Büschels zu ziehen.

**Lehrsatz des Brianchon.**

In jedem einfachen 6eck, welches aus 6 Strahlen eines Büschels  $\Pi^{\text{ter}}$  Ordnung gebildet wird, schneiden sich die 3 Hauptdiagonalen in einem Punkte.

Denn in Figur 19 ist  $SS, R C C, Q$ , ein 6eck obiger Art,  $S, C, R Q, CS$  die Hauptdiagonalen  $x$  der Schnittpunkt.

Ein  $\clubsuit$   $\Pi^{\text{ter}}$  Ordnung wird durch beliebige 2 seiner Strahlen in 2  $\overline{\wedge} \div$  geschnitten.

4 . . einer Kurve  $\Pi^{\text{ter}}$  Ordnung heissen  
 . . . wenn sie aus irgend einem und folglich  
 fünften . der Kurve durch harmonische | proje

Durch jeden . einer Kurve  $\Pi^{\text{ter}}$  Ordnun  
 Tangente.

Jede Kurve  $\Pi^{\text{ter}}$  Ordnung wird daher  
 nung umhüllt ein System von Berührun

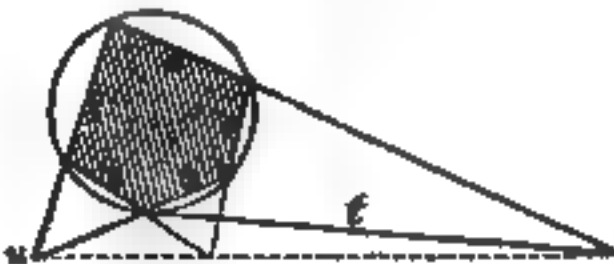
Zwei Kurven  $\Pi^{\text{ter}}$  Ordnung fallen zusam  
 sie entweder 5 . . oder 4 . . und die Tangen  
 derselben 8,, oder 3 . . und die Tangenten  
 gemein haben.

Wenn in einem 6eck, welches einer  
 unbegrenzt nähern, so wird die 6 Seite  $\infty$  kle

Wenn in einem 6eck, dessen Seiten  
 sich unbegrenzt nähern, so fällt ein Berühr

Wenn man auf diese Weise aus dem  
 selben folgende Lehrsätze:

Figur 20.



gegenüber liegenden Eck . in 8 . . einer — 1

In jedem  
 $\Pi^{\text{ter}}$  Ordn  
 schrieben  
 den sich je  
 einander fol  
 und die fün  
 der Tangen

Hiernach sind folgende

Aufgabe. Wenn 5 . . einer Kurve  $\Pi^{\text{ter}}$  Ordnung ge-  
 geben, sind die Tangenten an dieselben zu ziehen.

---

**Sätze.**


---

4 Strahlen eines Büschels  $\Pi^{\text{ter}}$  Ordnung heissen harmonische Strahlen, wenn sie durch irgend einen und folglich durch jeden fünften Strahl des Büschels in 4 harmonischen  $\cdot \cdot$  geschnitten werden.

Auf jedem Strahl eines Büschels  $\Pi^{\text{ter}}$  Ordnung liegt ein Berührungs  $\cdot$  desselben.

System von Tangenten eingehüllt und jeder  $\clubsuit$   $\Pi^{\text{ter}}$  Ord-

Zwei  $\clubsuit$   $\Pi^{\text{ter}}$  Ordnung fallen zusammen, wenn sie entweder  $5 \mid$  oder  $4 \mid$  und den Berührungs  $\cdot$  in einem derselben  $u$  oder  $3 \mid$  in die Berührungs  $\cdot \cdot$  in  $u$  und  $u$ , gemein haben.

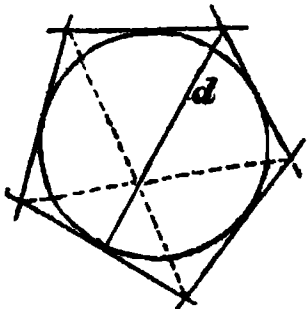
---

Ordnung eingeschrieben ist, 2 benachbarte Eck  $\cdot \cdot$  sich mit der Tangente zusammen.

Büschels  $\Pi^{\text{ter}}$  Ordnung bestehen, 2 benachbarte Seiten einem Eck  $\cdot$  zusammen.

4ecke und 3ecke entstehen lässt, so ergeben sich für die-

Figur 21.



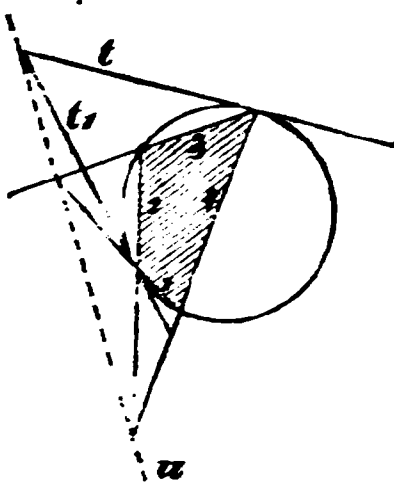
In jedem 5eck, dessen Seiten Strahlen eines Büschels  $\Pi^{\text{ter}}$  Ordnung sind, schneiden sich die Diagonalen mit der Transversale  $d$  aus dem fünften Eck  $\cdot$  nach dem gegenüberstehenden Berührungs  $\cdot$  in einem Punkte. Figur 21.

Aufgaben zu lösen:

Aufgabe. Wenn  $5 \mid$  eines Büschels  $\Pi^{\text{ter}}$  Ordnung gegeben, sind die Berührungs  $\cdot \cdot$  zu finden.

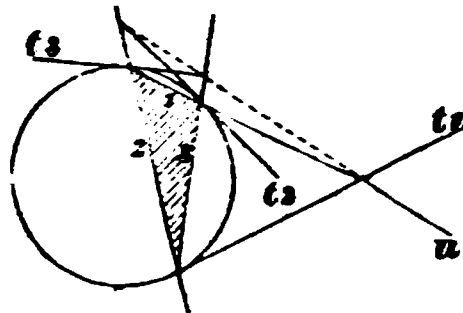


Figur 23.



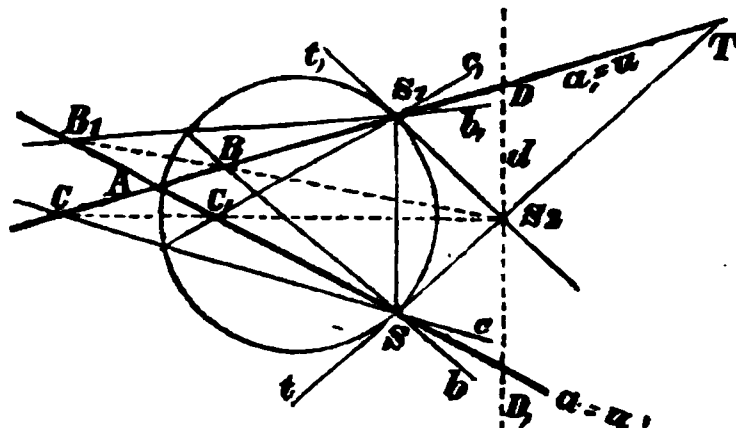
In jedem einer Kurve  $\Pi^{\text{ter}}$  Ordnung eingeschriebenen 4eck schneiden sich die Gegenseiten und die Tangenten  $t t'$  zu 2 gegenüberstehenden Eckpunkten in 3 Punkten einer Geraden  $u$ . Figur 23.

Figur 25.



In jedem einer Kurve  $\Pi^{\text{ten}}$  Grades eingeschriebenen 3eck schneiden sich die Tangenten  $t_1 t_2 t_3$  an die Eckpunkte mit den gegenüberstehenden Seiten in 3 Punkten einer Geraden. Figur 25.

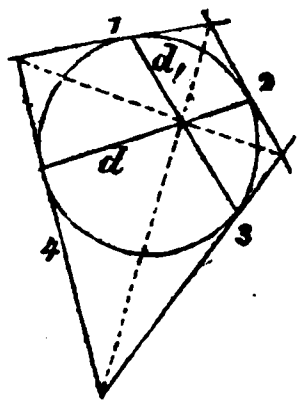
Figur 26 a.



Lässt man in Figur 18 die  $\div u$  und  $u$ , sich drehen und zwar so, dass  $u$  mit  $1 a$ , und  $u$ , mit  $a$  zusammen-

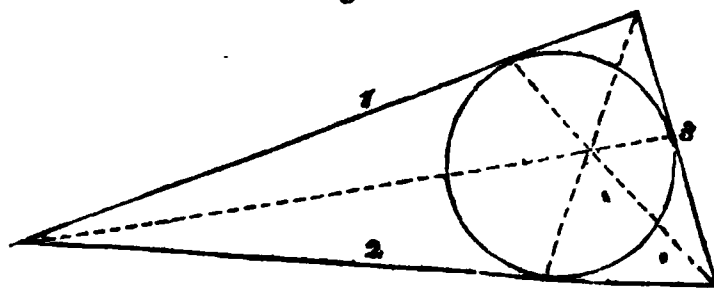
## Sätze.

Figur 24.



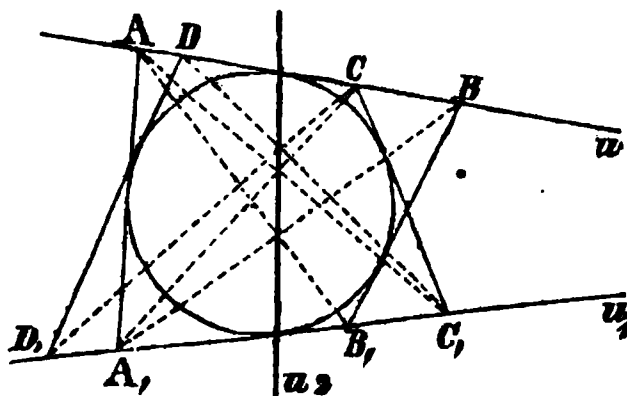
In jedem 4eck, welches aus | eines Büschels II<sup>ter</sup> Ordnung besteht, schneiden sich die Diagonalen und die Verbindungslinien  $d, d, d$ , von je 2 gegenüberstehenden Berührungs  $\cdot \cdot$  in einem Punkte. Figur 24

Figur 26.



Die 3 —, welche in einem von 3 | eines Büschels II<sup>ter</sup> Ordnung gebildeten 3eck die Eck  $\cdot \cdot$  mit den gegenüberliegenden Berührungs  $\cdot \cdot$  verbinden, schneiden sich in einem Punkte. Figur 26.

Figur 27.



Lässt man in Figur 19 S, mit A und S mit A, zusammenfallen, so fällt die — S, u u, mit u und die —

fällt und bestimmt  $S_2$ , so ist dieses der Durchschnitts-  
der Tangenten  $t$  und  $t_2$ ; denn um den entsprechenden  
Strahl  $\overline{S, S}$  zu finden, hat man  $S$  durch  $S_2$  nach  $T$  zu  
projiciren und  $\overline{S T}$  zu ziehen, und ebenso ergibt sich der  
entsprechende  $|$  von  $\overline{S S}$ , in der Linie  $S_1 S_2$ .

Ausserdem liegen  $b, \dot{a} \dot{a}, b$ , sowie  $\dot{c}, a \dot{a}, c$  in 2 durch  
 $S_2$  gehenden —. Dasselbe würde mit den Punkten  $b, \dot{e}$  —  
 $\dot{e}, b$ , sowie  $\dot{c}, b \cdot b, c$  stattfinden, wenn man  $u$  und  $u$ , mit  
 $e$  und  $e$ , oder  $b$  und  $b$ , zusammenfallen lassen würde.

Daraus

Die beiden Punkte  $\dot{a} b$ , und  $\dot{a}, b$ , in welchen irgend  
2 Paare entsprechender  $|$  der  $\overline{\wedge} \text{ * } S$  und  $S$ , sich wechsel-  
seitig schneiden, liegen mit dem Schnitt  $\cdot S_2$  der Tangenten  
an  $S$  und  $S$ , in einer Geraden.

Sind daher 3 Paar entsprechender Strahlen  $a a,, b b,,$   
 $c c$ , gegeben, so ergibt sich aus den Durchschnitts  $\cdot \cdot$   
 $\dot{a} b,, \dot{a}, b, \dot{a} c,, \dot{a}, c$  nach Figur 26 sehr leicht  $\cdot S_2$  und jede  
durch ihn gelegte —  $d$  schneidet mit  $a$  und  $a$ , ent-  
sprechende  $\cdot \cdot ab$ .

Bilden 4  $\cdot \cdot K L M N$  einer Kurve IIter Ordnung ein  
vollständiges 4eck und ihre Tangenten  $k l m n$  ein  
vollständiges 4seit, so liegen in den Verbindungslinien  
der 3  $\cdot \cdot X Y Z$ , in welchen die Gegenseiten des 4ecks  
sich schneiden, je 2 Gegen  $\cdot \cdot$  des 4seits, denn die vorigen  
Sätze gelten für jedes der 3 einfachen 4ecke, in denen  
das vollständige zerfällt. Figur 28.

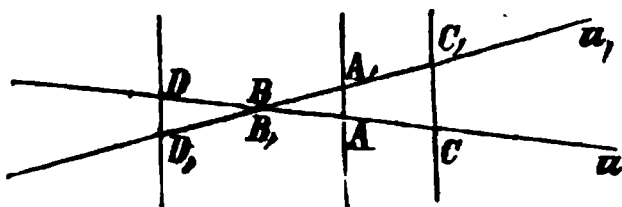
## Sätze.

$S$  u  $u$ , mit  $u$ , zusammen und das  $\div u_2$  geht durch die Berührungs  $\cdot \cdot T$  und  $T,$ .

Ausserdem liegen alsdann auf  $\overline{TT}$ , die Schnitt  $\cdot \cdot$  der  $\overline{A, B}$  und  $\overline{A, B},$ ,  $\overline{A, C}$  und  $\overline{A, C},$ .

Dasselbe würde mit  $\overline{B, C}$ , und  $\overline{B, C}$  stattfinden, wenn die Mittelpunkte der Strahlenbüschel  $S$  und  $S,$  nach  $C$ , und  $C$  verlegt würden.

Figur 27a.



folgt:

Die beiden  $\overline{A, B}$ , und  $\overline{A, B},$  durch welche irgend 2 Paare entsprechender  $\cdot \cdot$  der  $\wedge \div u$  und  $u$ , sich wechselseitig projeciren, schneiden sich auf der Verbindungslinie der Berührungs  $\cdot \cdot$  von  $u$  und  $u$ , (Berührungssehne  $u_2$ ).

Sind daher 3 Paar entsprechende  $\cdot \cdot$  (Figur 27) gegeben, so bestimmen die Durchschnittspunkte von  $\overline{A, B},$   $\overline{A, B}$  und  $\overline{A, C},$   $\overline{C, A}$  die Berührungssehne  $u_2$ . Zu jedem  $\cdot D$  ergibt sich der entsprechende  $D,$ , indem man  $D$  nach  $C$ , projecirt und  $C$  durch  $u_2$  nach  $u,$ .

Bilden 4 Strahlen eines Büschels  $\Pi^{\text{ter}}$  Ordnung  $k l m n$  ein vollständiges 4seit und ihre Berührungs  $\cdot \cdot K L M N$  ein vollständiges 4eck, so gehen durch die Schnittpunkte  $x y z$  der 3  $\text{---}$ , welche die Gegenpunkte des 4ecks verbinden, je 2 Gegenseiten des 4seits, denn die vorigen Sätze gelten für jedes der 3 4seite, aus denen das vollständige zusammengesetzt ist. Figur 28.

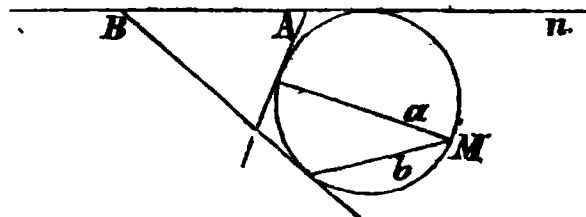


## Sätze.

Denkt man sich  $\bullet k$  auf der Kurve beweglich, so gleiten die Schnitt  $\bullet \bullet$  der Tangente  $k$ , nämlich  $E$  und  $A$ , auf  $n$  und  $l$  weiter und beschreiben dabei  $2 \overline{\wedge} \div$ , denn es ist  $SN$  die Berührungssehne, wie in Figur 27, auf der sich immer je  $2 \mid AD$  und  $EB$  wechselseitig in  $Y$  schneiden. Die Tangente  $k$  durchläuft daher bei ihrer Drehung einen  $\ast$  IIter Ordnung.

Daraus folgt:

Figur 29.



Die sämtlichen Berührungs  $\bullet \bullet$  eines  $\ast$  IIter Ordnung bilden eine Kurve IIter Ordnung.

stets durch  $Y$  geht, so beschreibt sie um  $\bullet M$  einen  $\ast$ , lich zu dem von  $E$  beschriebenen  $\div \overline{\wedge}$  ist. Daraus folgt

fester  $\bullet M$  und eine beliebige feste Tangente  $n$  gegeben,  $\bullet k$  der Kurve projecirt denjenigen  $\bullet$  von  $n$  zu, durch der  $\ast M$  und das gerade Gebilde  $n \wedge$  auf einander be-

$\bullet \bullet$  einer Kurve IIter Ordnung 4 harmonische Tangenten.

$\ast$  IIter Ordnung aus einem nicht in derselben  $\square$  be- Ordnung projecirt wird, jede Tangente aber durch eine strahl) projecirt wird, so folgt daraus:

Die sämtlichen Berührungs  $\mid$  eines  $\mid$  IIter Ordnung bilden eine Kegelfläche IIter Ordnung.

Die sämtlichen Berührungs  $\square \square$  einer Kegelfläche IIter Ordnung werden von je 2 unter ihnen in  $\overline{\wedge} \ast$  geschnitten.

Vier | einer Kegelfläche  $\Pi^{\text{ter}}$  Ordnung heissen harmonische, wenn sie aus irgend einem und folglich aus jedem fünften Strahle der Fläche durch 4 harmonische  $\square$   $\square$  projecirt werden.

In jedem einer Kegelfläche eingeschriebenen 6kant schneiden sich die 3 Paar Gegenseiten in 3 — einer  $\square$ .

Bezeichnet man die  $\infty$  ferne Gerade einer  $\square$  mit weder keinen • oder einen • oder 2 • •.

In Fall I sind alle • • der Kurve und alle Tangenten dann eine Ellipse. In Fall II berührt die unendlich oder uneigentlichen •. Die Kurve heisst eine Parabel. und letztere hat 2 uneigentliche • •, jedoch 2 eigentliche Hyperbel.

Zwei  $\overline{\wedge}$   $\ast$ , die schief in der  $\square$  liegen, erzeugen parallel läuft; eine Parabel, wenn 1 Paar; und eine sich leicht erkennen, wenn man die  $\overline{\wedge}$   $\ast$  so in der  $\square$  richtung zu ändern. Die  $\parallel$  Strahlen fallen dann zu-

Zwei  $\overline{\wedge}$   $\div$  können nur dann eine Parabel erzeugen, denn die unendlich ferne — ist eine der Tangenten (Figur 27a), indem man 2 entsprechende • • aufeinander bündels dar, weil ihr Projektions-Mittel • auf dem  $\infty$

Bewegen sich die Eck • • eines  $\triangle$  so auf 3 in der  $\square$  ändern, so beschreibt die dritte Seite entweder auch ein Parabel umhüllt. Denn durch die  $\parallel$   $\ast$  der ersten 2 Seiten auf das dritte und folglich auf einander  $\overline{\wedge}$   $\sim$  bezogen.

Sind ein  $\div$  u und ein  $\ast$  S, die in derselben  $\square$  liegen, u eine  $\parallel$  zu dem entsprechenden | von S, so schneiden sich rabel. Schneidet man nämlich den  $\ast$  S durch die  $\infty$  zu u projektivisch liegt. Ist dasselbe nicht  $\wedge$  zu u, so  $\infty$  ferne — enthält und folglich eine Parabel umhüllt.

Wird eine Kurve  $\Pi^{\text{ter}}$  Ordnung aus einem nicht in eine Cylinderfläche  $\Pi^{\text{ter}}$  Ordnung.

---

**Sätze.**


---

Vier Berührungs  $\square \square$  einer Kegelfläche  $\Pi^{\text{ter}}$  Ordnung heissen harmonische, wenn sie von irgend einer und folglich auch von jeder fünften in 4 harmonischen Strahlen geschnitten werden.

In jedem einer Kegelfläche  $\Pi^{\text{ter}}$  Ordnung umschriebenen 6kant schneiden sich die 3 Haupt-Diagonalebenen in einer —.

u, so hat eine Kurve  $\Pi^{\text{ter}}$  Ordnung damit gemein: ent-

eigentliche  $\cdot \cdot$  und  $|$  der Ebene und die Kurve heisst ferne — die Kurve und letztere hat einen  $\infty$  fernen Im dritten Falle schneidet die  $\infty$  ferne — die Kurve Tangenten (Asymptoten) in dieselbe. Die Kurve ist eine

daher eine Ellipse, wenn kein Paar entsprechender  $|$  Hyperbel, wenn 2 Paar  $||$  laufen. Der Parallelismus lässt verschiebt, dass sie konzentrisch werden ohne die Strahlen-sammen.

wenn die  $\infty$  fernen  $\cdot \cdot$  zugleich entsprechende  $\cdot \cdot$  sind, Solche  $\div$  heissen  $\overline{\wedge} \sim$ . Bringt man sie in  $\wedge$  Lage, legt, so stellen sie sich als Schnitte eines  $||$  Strahlen-fernen  $|$ , also selbst  $\infty$  ferne liegt. Daraus folgt: gegebenen —, dass 2 Seiten desselben ihre Richtung nicht  $||$  Strahlenbüschel oder einen  $\ast$   $\Pi^{\text{ter}}$  Ordnung, der eine werden 2 von den  $\div$ , die in den gegebenen — liegen,

$\overline{\wedge}$  auf einander bezogen und zieht man durch jeden  $\cdot$  von diese  $||$  entweder in einem  $\cdot$  oder sie umhüllen eine Pa-ferne — der  $\square$ , so erhält man ein  $\infty$  fernes  $\div$ , welches erzeugt es mit u einen  $\ast$   $\Pi^{\text{ter}}$  Ordnung, welches auch die

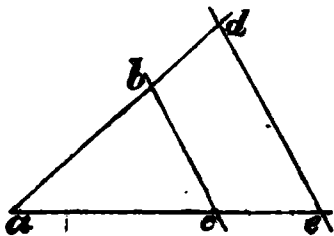
ihrer  $\square$  liegenden  $\infty$  fernen  $\cdot$  projecirt, so erhält man



# Graphische Statik.

## Multiplikation von Strecken.

Figur 1.



a und b seien die zu multiplicirenden Strecken, x das gesuchte Produkt, so mache man, Figur 1:

a c = der Maasseinheit,

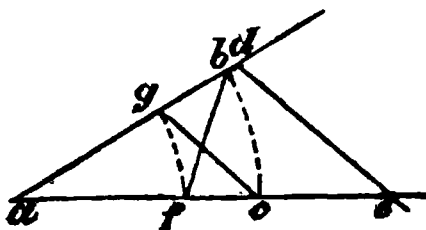
a b = b,

a e = a, ziehe

b c  $\parallel$  d e, so ist

a d = x.

Figur 2.



Oder man mache, Figur 2:

a f = Eins,

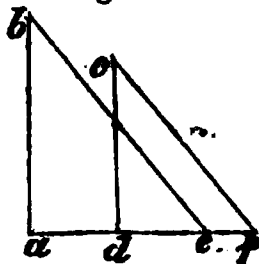
a b = b,

a d = a, ziehe

d e anti  $\parallel$  b f, so ist

a e = x.

Figur 3.



Oder Figur 3:

a b = Eins,

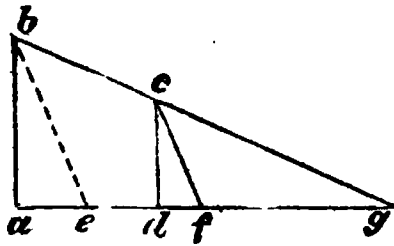
a e = a,

c d = b  $\parallel$  a b,

c f  $\parallel$  b e, so ist

d f = x.

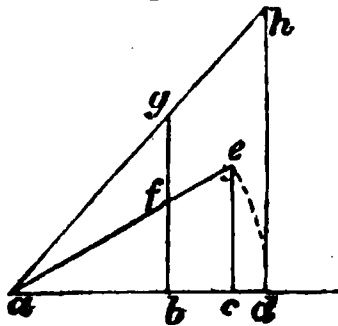
Figur 4.



Oder Figur 4:

$ab = \text{Eins}$ ,  $cd = b \parallel ab$ ,  
 $eg = a$ ,  $cf \parallel be$ , so ist  
 $fg = x$ .

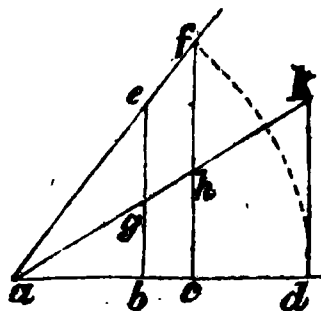
Figur 5.



Sind 3 Strecken  $abc$  zu multiplizieren, Figur 5, so mache man:

$ab = \text{Eins}$ ,  
 $ac = a$ ,  
 $gb \perp ad$ ,  
 $af = b$ ,  
 $ec \perp ad$ ,  
 $ae = ad$ ,  
 $hd \perp ad$ ,  
 $ag = c$ , so ist  
 $ah = x = a \cdot b \cdot c$ .

Figur 6.

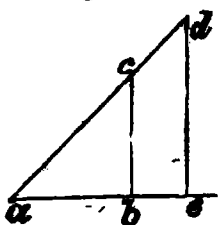


Oder Figur 6:

$ab = \text{Eins}$ ,  
 $ac = a$ ,  
 $eb \perp ac$ ,  
 $ae = b$ ,  
 $fc \parallel eb$ ,  
 $ad = af$ ,  
 $gb = c$ ,  
 $kd \parallel gb$ , so ist  
 $kd = x = a \cdot b \cdot c$ .

### Division von Strecken.

Figur 7.



Es sei:  $a$  der Dividendus,  
 $b$  der Divisor,  
 $x$  der Quotient.

Man mache:

$ab = \text{Eins}$ ,  
 $cb \perp ae$ .

$a c = b$  und  $a d = a$ ,  
 $d e \perp a e$ , so ist

$$a e = x = \frac{a}{b}.$$

Oder Figur 8:

$a b = \text{Eins}$ ,

$a e = b$ ,

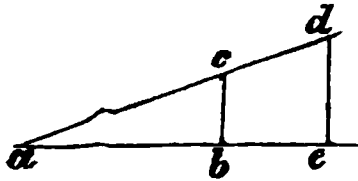
$d e \perp a e$ ,

$a d = a$ ,

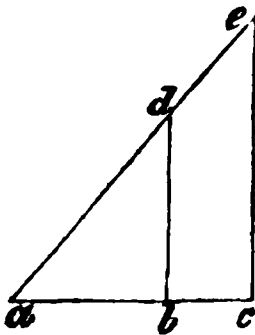
$c b \parallel d e$ , so ist

$$a c = x = \frac{a}{b}.$$

Figur 8.



Figur 9.



Oder Figur 9:

$a b = \text{Eins}$ ,

$a c = b$ ,

$e c \perp a c = a$ ,

$d b \parallel e c$ , so ist

$d b = x$ ,

$$= \frac{a}{b}.$$

### Multiplikation verbunden mit Division.

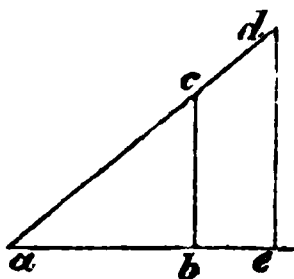
Es sei die Strecke  $a$  zu multipliciren

mit einem Bruche  $\frac{b}{c}$ , und es sei

$$x = \frac{a b}{c}.$$

Man mache, Figur 10:

Figur 10.



$a b = c$ ,

$a e = a$ ,

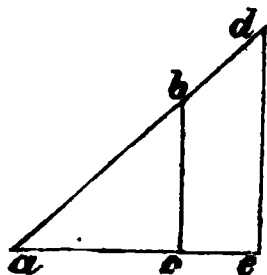
$b c \perp a e$ ,

$a c = b$ ,

$d e \parallel c b$ , so ist

$$a d = x = \frac{a b}{c}.$$

Figur 11.



Soll  $\frac{ab}{2}$  konstruiert werden, so mache man, Figur 11:

$ac = 2$  mal der Einheit,

$bc \perp ac = b$ ,

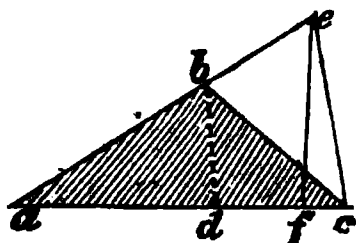
$de \parallel bc$ , so ist

$$de = x = \frac{ab}{2}.$$

### Flächeninhalt des Dreiecks.

Es sei  $h$  die Höhe,  $b$  die Grundlinie,  $F$  der Flächeninhalt, Figur 12:

Figur 12.



Man nehme eine Seite, z. B.  $ac$  als Grundlinie an, mache

$ad = 2$  mal der Einheit,

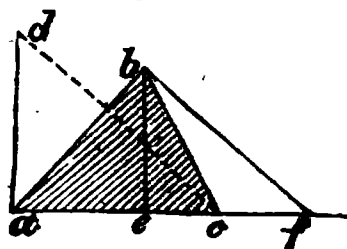
$ec \parallel bd$ ,

$ef \perp ac$ , so ist

$$ef = F = \frac{bh}{2}.$$

Oder Figur 13:

Figur 13.



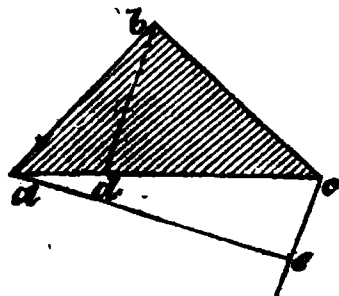
$ad \perp ac = 2 \times$  der Einheit,

$be \perp ac$ ,

$bf \parallel dc$ , so ist

$$ef = F = \frac{bh}{2}.$$

Figur 14.



Oder Figur 14:

$bd = 2 \times$  der Einheit,

$ce \parallel bd$ ,

$ae \perp ce$ , so ist

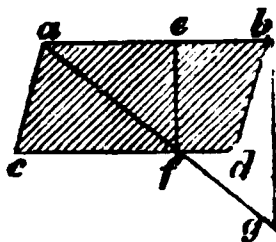
$$ae = F = \frac{bh}{2}.$$

## Flächeninhalt des Vierecks.

### a. Parallelogramm.

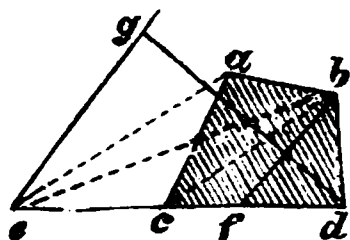
b Grundlinie, h Höhe, F Flächeninhalt.

Figur 15.



$$\begin{aligned} a e &= \text{Eins,} \\ f e &\perp a b, \\ b g &\perp a b, \\ b g &= F \\ &= b h. \end{aligned}$$

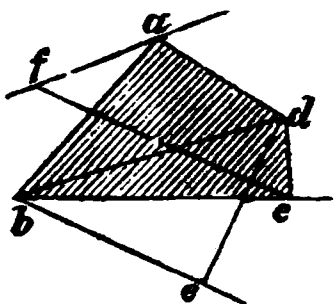
Figur 16.



Figur 16.

$$\begin{aligned} a e &\parallel c b, \\ b f &= 2 \times \text{der Einheit,} \\ e g &\parallel b f, \\ d g &\perp g e, \text{ so ist} \\ d g &= F. \end{aligned}$$

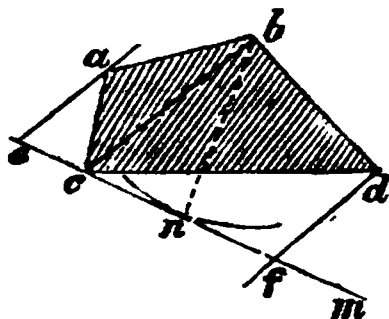
Figur 17.



Oder Figur 17:

$$\begin{aligned} a f &\parallel b d, \\ c f &= 2 \times \text{der Einheit,} \\ b e &\parallel c f, \\ d e &\perp b e, \text{ so ist} \\ d e &= F. \end{aligned}$$

Figur 18.



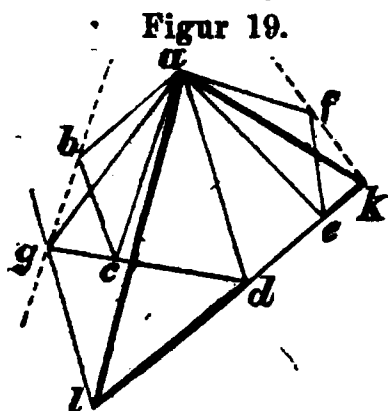
Oder Figur 18:

$$\begin{aligned} &\text{Kreis mit } b n = 2 \times \text{der Einheit um } b, \\ &c m \text{ durch } c \text{ berührend an den Kreis,} \\ a e &\parallel c b, \\ d f &\parallel e b, \text{ so ist} \\ e f &= F. \end{aligned}$$

## Flächeninhalt von Polygonen.

Figur 19.

Die Konstruktion des Flächeninhalts geschieht durch Ver wandelung des Polygons in ein  $\triangle$ .



Figur 19.

Die Verwandlung selbst geschieht wie folgt:

$abcdef$  sei das Polygon.

Man schneide durch  $ac$  eine Ecke  $ab$ , ziehe  $bg \parallel ac$ , verlängere  $cd$  bis  $g$  und ziehe  $ag$ , so ist  $abcdef$  in ein Polygon  $agdef$  verwandelt, welches eine Seite weniger hat. Durch Fortsetzung der Konstruktion, resp. durch Abschneiden anderer Ecken wie bei  $f$ , gelangt man zu dem  $\triangle alk$ , welches dem Polygon  $abcdef$  flächengleich ist und dessen Inhalt nach den früher gegebenen Methoden ermittelt werden kann.

## Potenziren von Strecken.

Figur 20.

Es sei  $a$  der Grundfaktor.

Man mache

$$ac = \text{Eins},$$

$$bc \perp ak,$$

$$ab = a,$$

$$ad = ab,$$

$$af \perp ak.$$

$$af = ae,$$

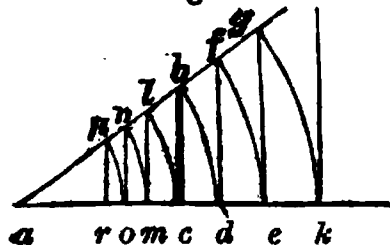
$$eg \perp ak \text{ u.s.w., so ist}$$

$$ab = a,$$

$$af = a^2,$$

$$ag = a^3 \text{ u.s.w.}$$

Figur 20.



Macht man links von  $bc$ :

$$al = ac,$$

$$lm \perp ak,$$

$$am = an,$$

$$no \perp ak,$$

u. s. w., so ist

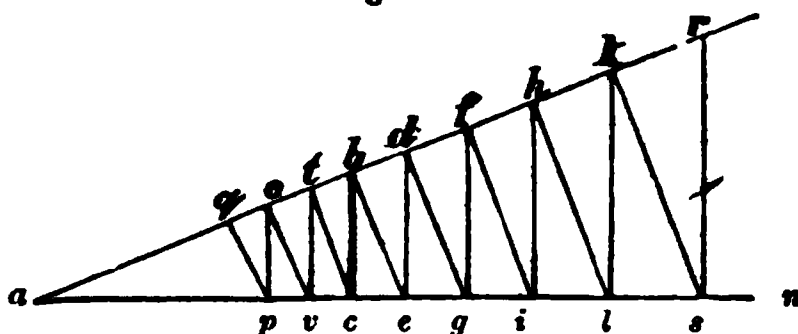
$$am = a^{-1} = \frac{1}{a},$$

$$ao = a^{-2} = \frac{1}{a^2},$$

$$ar = a^{-3} = \frac{1}{a^3}.$$

Oder Figur 21:

Figur 21.



Man mache

$$ae = \text{Eins}; bc \perp an; ab = a; \text{ ferner}$$

$$be, dg, fi, hl, ks \text{ u. s. w. } \perp am \text{ und }$$

$$de, fg, hi, kl, rs \text{ u. s. w. } \perp an,$$

so ist rechts von  $bc$ :

$$ae = a^2; ag = a^4; ai = a^6; al = a^8 \text{ u. s. w.};$$

$$ad = a^3; af = a^5; ah = a^7; ak = a^9 \text{ u. s. w.};$$

links von  $bc$ :

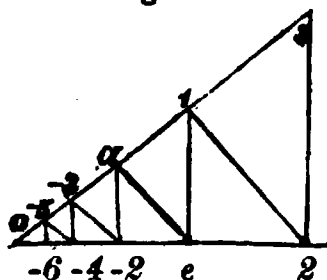
$$at = a^{-1}; ac = a^{-3}; aq = a^{-5} \text{ u. s. w.};$$

$$av = a^{-2}; ap = a^{-4}; \text{ u. s. w.}$$

Diese beiden Konstruktionen setzen voraus, dass  $a > 1$  ist.

Bei den nachfolgenden ist  $a < 1$ .

Figur 22.



Man mache, Figur 22:

$$oe = \text{Eins},$$

$$oa = a,$$

$$ae \perp oa$$

und ziehe die Lothe und Gegenlothe, so ist:

$$o1 = \frac{1}{a},$$

$$o-2 = a^2,$$

$$o2 = \frac{1}{a^2},$$

$$o-3 = a^3,$$

$$o3 = \frac{1}{a^3}$$

$$o-4 = a^4$$

u. s. w.

u. s. w.

Oder Figur 23:

Man mache

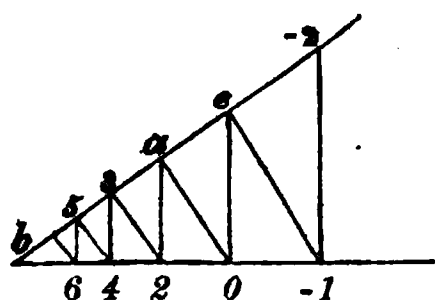
$$oe = \text{Eins},$$

$$ob \perp oe,$$

$$oa = a,$$

$$oa \perp ae.$$

Figur 28.



Ziehe die Lothe und Gegenlothe, so ist:

$$oa = a,$$

$$a2 = a^2,$$

$$23 = a^3$$

u. s. w.

$$oe = a^0 = 1,$$

$$e-1 = a^{-1} = \frac{1}{a},$$

$$-1-2 = a^{-2} = \frac{1}{a^2},$$

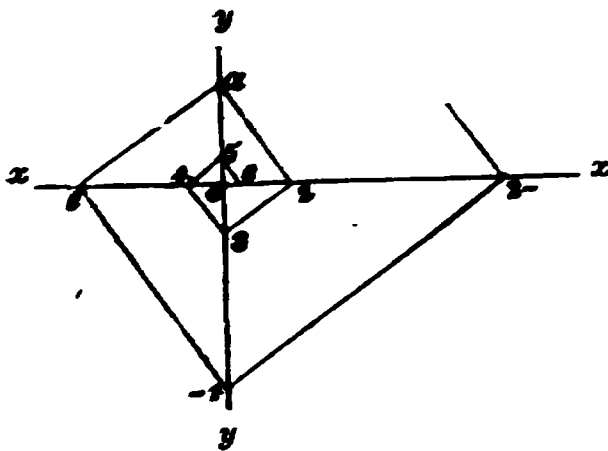
$$-2-3 = a^{-3} = \frac{1}{a^3}$$

u. s. w.



Das Verfahren Figur 24 ist sowohl für  $a > 1$  wie auch für  $a < 1$  gültig.

Figur 24.



Man mache:

$$\begin{aligned} xx &\perp yy, \\ oe &= \text{Eins}, \\ oa &= a; \end{aligned}$$

ferner:

$$\begin{aligned} a2 &\perp ae, \\ 23 &\perp a2, \\ 34 &\perp 23 \\ \text{u. s. w.} \end{aligned}$$

Ebenso

$$\begin{aligned} e-1 &\perp ae, \\ -1-2 &\perp e-1, \end{aligned}$$

so ist:

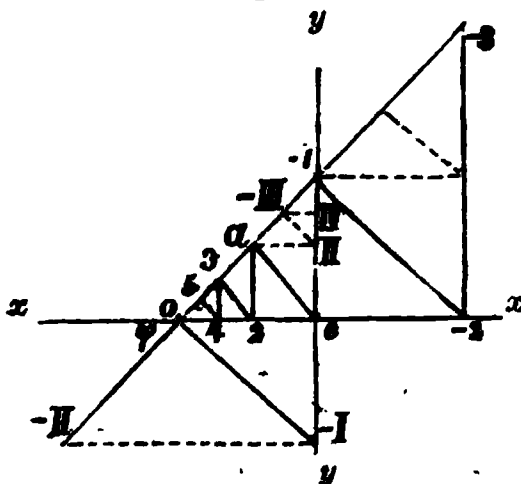
$$o2 = a^2; o3 = a^3; o4 = a^4 \text{ u. s. w.}$$

$$o-1 = \frac{1}{a}; o-2 = \frac{1}{a^2}; o-3 = \frac{1}{a^3} \text{ u. s. w.}$$

## Potenziren der trigonometrischen Funktionen.

### Sinus und Cosinus.

Figur 25.



Man mache, Figur 25:

$$\begin{aligned} xx &\perp yy; oe = 1 \\ \angle \varphi &= \text{dem gegebenen } \angle, \\ ea &\perp oa. \end{aligned}$$

Zieht man die Lothe und Gegenlothe:

$$a2; 23; 34 \text{ u. s. w.};$$

ferner:

$$e-1; -1-2 \text{ u. s. w.},$$

so ist:

$$\begin{aligned} o a &= \cos. \varphi, \\ o 2 &= \cos. \varphi^2, \\ o 3 &= \cos. \varphi^3, \\ o 4 &= \cos. \varphi^4, \\ &\dots \end{aligned}$$

$$o-1 = \frac{1}{\cos. \varphi},$$

$$o-2 = \frac{1}{\cos. \varphi^2} \text{ u. s. w.}$$

Zieht man die Lothe und Gegenlothe:  
a II; II III; III IV; . . . o-1; -I-II u. s. w., so ist

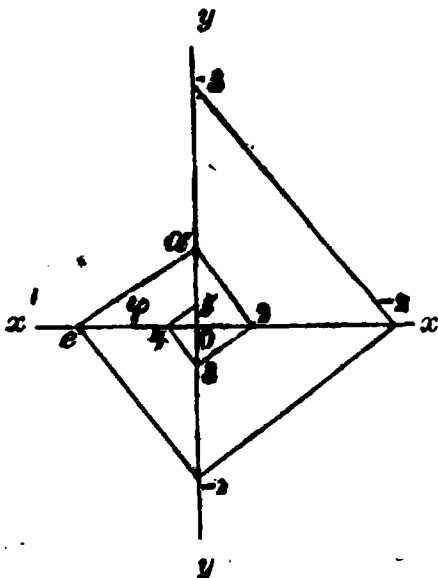
$$\begin{aligned} a e &= \sin. \varphi, \\ a II &= \sin. \varphi^2, \\ II III &= \sin. \varphi^3, \\ III IV &= \sin. \varphi^4, \\ &\dots \end{aligned}$$

$$o-1 = \frac{1}{\sin. \varphi},$$

$$-I-II = \frac{1}{\sin. \varphi^2} \text{ u. s. w.}$$

### Tangente und Cotangente, Figur 26.

Figur 26.



Man mache:

$$\begin{aligned} x x &\perp y y, \\ \angle \varphi &= \text{dem gegebenen } \angle, \\ e o &= \text{Eins.} \end{aligned}$$

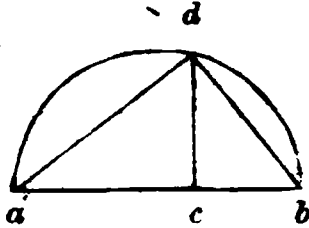
Zieht man die Wechsellothe, so ist:

$$\begin{aligned} o a &= \text{tang. } \varphi, \\ o 2 &= \text{tang. } \varphi^2, \\ o 3 &= \text{tang. } \varphi^3, \\ &\dots \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} o e &= 1, \\ o-1 &= \text{cot. } \varphi, \\ o-2 &= \text{cot. } \varphi^2 \\ &\text{u. s. w.} \end{aligned}$$

## Zweite und vierte Wurzel.

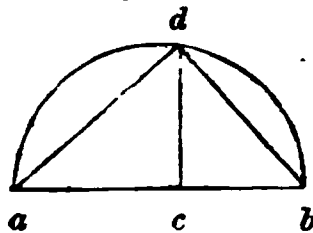
Figur 27.



Mache, Figur 27, im Halbkreise:

$$\begin{aligned} ab &= a, \\ ac &= \text{Eins}, \\ dc &\perp ab, \text{ so ist} \\ ad &= \sqrt{a}, \text{ oder} \end{aligned}$$

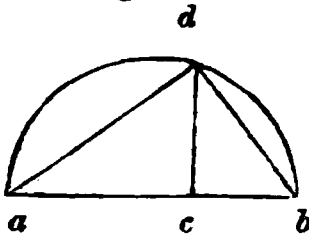
Figur 28.



Mache, Figur 28, im Halbkreise:

$$\begin{aligned} ab &= \text{Eins}, \\ ac &= a, \\ dc &\perp ab, \text{ so ist} \\ ad &= \sqrt{a}, \text{ oder} \end{aligned}$$

Figur 29.



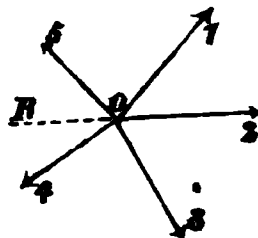
Mache, Figur 29:

$$\begin{aligned} ab &= \text{Eins}, \\ bc &= a, \\ db &\perp ac, \text{ so ist} \\ db &= \sqrt{a}. \end{aligned}$$

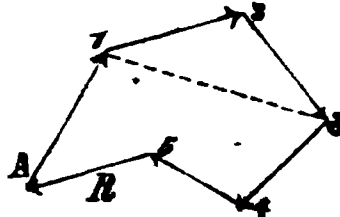
Das Ausziehen der 4<sup>ten</sup> Wurzel kann durch 2maliges Ausziehen der Quadrat  $\sqrt{\quad}$  geschehen, überhaupt kann dieses Verfahren auf Halbierung des Exponenten eines Radikanten angewandt werden.

## Mittelkraft eines Kräftebüschels.

Figur 30.



Figur 31.



Die Mittelkraft R aus einem Kräftebüschel, Figur 30, wird gefunden, indem man ein Polygon (Figur 31) bildet,

worin man

$A\ 1 =$  und  $\parallel$  Kraft 1,

$1\ 2 =$  „  $\parallel$  „ 2,

$2\ 3 =$  „  $\parallel$  „ 3

u. s. w.

zieht. Die Schlusslinie  $R = 5\ A$  ist die Mittelkraft der Grösse und Richtung nach.

Im geschlossenen Kräftepolygon ist jede einzelne Kraft die Mittelkraft von den übrigen. So ist in Figur 31:

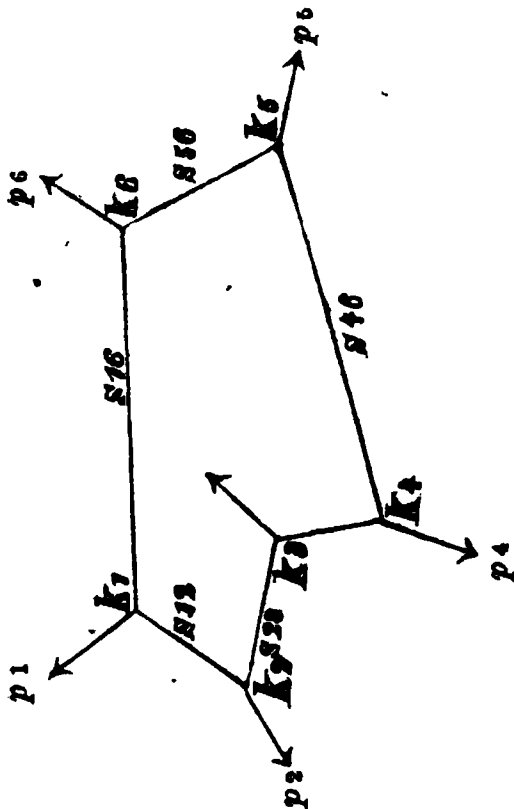
$1\ 2$  die Mittelkraft von  $3\ 4\ 5\ R\ 1$ ,

$3\ 4$  „ „ „  $1\ 2\ 3\ 5\ R$ ,

$1\ 3$  „ „ „ 2 und 3, oder von  
 $4\ 5\ R\ 1$ .

### Das Seilpolygon.

Figur 32.



\* Wenn Kräfte an einem Körper in der Ebene wirken, so kann man sich denselben durch ein System von geradlinigen festen Gebilden ersetzt denken, welche, von einer Kraft zur anderen gehend, ein Polygon bilden, dabei sowohl Zug- als Druckkräften widerstehen können und so gerichtet sind, dass jede der einzelnen Kräfte im Gleichgewicht mit den beiden Kräften ist, welche in den genannten Polygonseiten wirkend, mit ihr an einem Punkte angreifen.

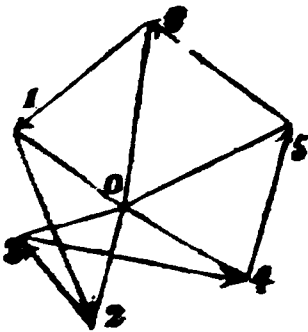
Ein solches Polygon heisst Seil oder Gelenkpolygon, Figur 22. Die Polygonecken  $k$  heissen Knoten. Die in den Polygonseiten wirkenden Kräfte heissen innere, die an den Ecken wirkenden äussere Kräfte.

**a. Gleichgewicht der äusseren Kräfte.**

Wenn man aus den äusseren Kräften, ganz wie im vorigen Abschnitt, ein Kräftepolygon bildet, so ist dieses geschlossen, wenn Gleichgewicht vorhanden ist, oder gibt anderenfalls die Grösse und Richtung der Mittelkraft an.

**b. Gleichgewicht der inneren Kräfte.**

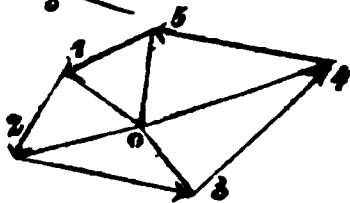
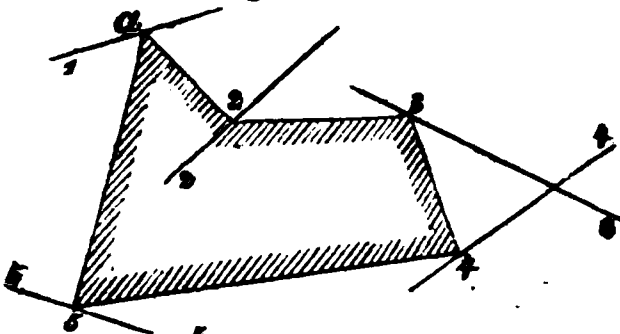
Figur 33.



Bildet man in Figur 33 das Kräftepolygon zu dem Seilpolygon Figur 32 und zieht von den Enden einer Kraft, z. B. von  $p$ , die Parallelen  $01$  und  $02$  zu  $s1\cdot2$  resp.  $s1\cdot3$ , so schneiden sich diese in einem Punkte  $0$ , welcher der Pol des Kräftepolygons heisst.

Die von dem Pol  $0$  nach den Ecken des Polygons gezogenen Strahlen  $01$ ,  $02$ ,  $03$  u. s. w. geben die Spannungen im Seilpolygon der Grösse und Richtung nach an.

Figur 34.



Figur 35.

Aus dem Kräftepolygon Figur 35 und einem willkürlich darin angenommenen Pol lässt sich das Seilpolygon für in der Ebene zerstreut liegende Kräfte, Figur 34, bilden, indem man von einem beliebigen Punkte  $a$  ausgehend

$$a 2 \parallel 0 1,$$

$$2 3 \parallel 0 2,$$

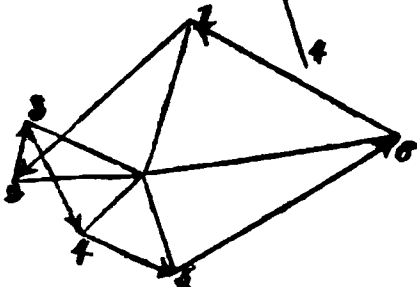
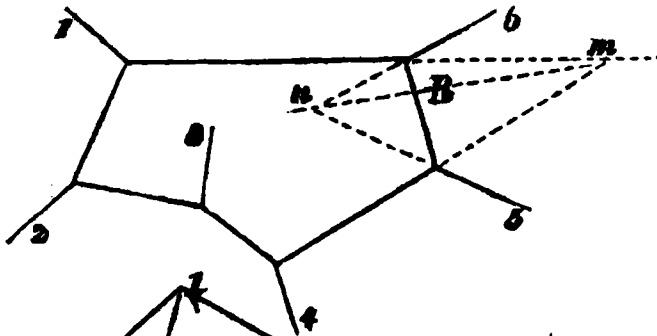
$$3 4 \parallel 0 3,$$

$$4 5 \parallel 0 4,$$

u. s. w. zieht.

c. Mittelkraft von zerstreut in der Ebene liegenden Kräften.

Figur 36.



Figur 37.

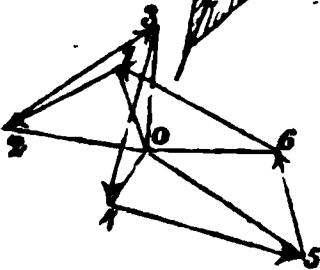
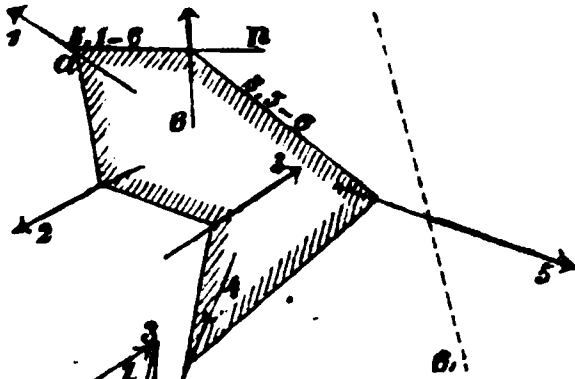
Der Durchschnittspunkt  $m$  zweier Seiten des Seilpolygons Figur 36 ist ein Punkt der Mittelkraft aller zwischen den beiden Seiten liegenden Kräfte  $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4$ .

Die Richtung und Grösse dieser Mittelkraft wird durch die Diagonale  $4 \cdot 6$  im Kräftepolygon, Figur 37, bestimmt.

Hiernach lässt sich eine gegebene Kraft  $4 \cdot 6$ , Figur 37, in 2 Kräfte 5 und 6 von gegebener Richtung zerlegen. Zu dem Ende trage man die Kräfte 5 und 6 in das Kräftepolygon ein. Nehme mit der Kraft  $R$ , Figur 36, einen beliebigen Punkt  $n$  an und ziehe 5 und 6 Figur 36  $\parallel 5 \cdot 6$  und  $4 \cdot 5$  in Figur 37.

## Gleichgewichtsbedingungen für zerstreut wirkende Kräfte in der Ebene.

Figur 38.



Figur 39.

Gleichgewicht ist vorhanden, wenn sowohl der Kräftepolygon wie auch das Seilpolygon eine geschlossene Figur bildet.

Ist kein Gleichgewicht vorhanden, so zeigt das Seilpolygon an, wie dasselbe herzustellen sei.

a) Herstellung des Gleichgewichts durch eine Kraft, deren Richtung gegeben ist.

In Figur 38 sei 6, diese Richtung und 1.2.3.4.5 die gegebenen Kräfte.

Man bilde das Kräftepolygon Figur 39, wähle einen Pol 0, ziehe die Polstrahlen und bilde das Seilpolygon Figur 38.

In dem Durchschnittspunkt von  $s \cdot 4 \cdot 6$  und  $s \cdot 5 \cdot 6$ , Figur 38, ziehe man eine Parallele zu 6,, so ist dieses die Lage der gesuchten Kraft. Ihre Grösse ist gleich  $5 \cdot 6$  im Kräftepolygon Figur 29.

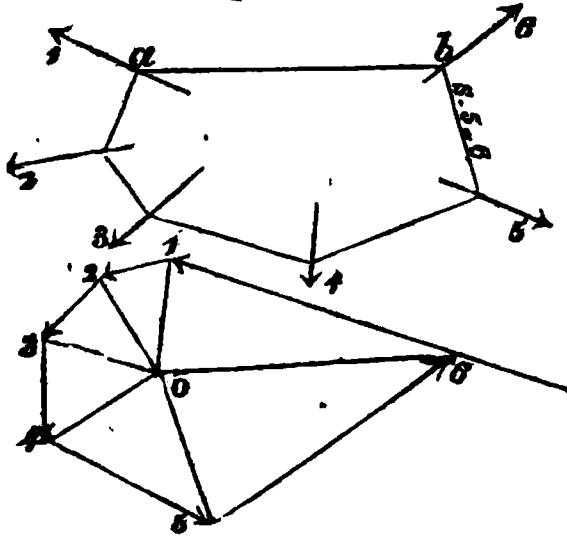
b) Herstellung des Gleichgewichts durch eine der Lage und Grösse nach unbekannte Kraft.

Man bilde das Kräftepolygon und ziehe dessen Schlusslinie. Nehme einen Pol an und bilde das Seilpolygon.

c) Herstellung des Gleichgewichts, wenn ausserdem auch die Grösse einer der Kräfte unbekannt ist, und eine Seite des Seilpolygons eine gegebene Lage haben soll.

Es sei 1 die Kraft, deren Grösse unbekannt ist, und  $a b$  die gegebene Richtung der Polygonseite. Figur 40.

Figur 40.

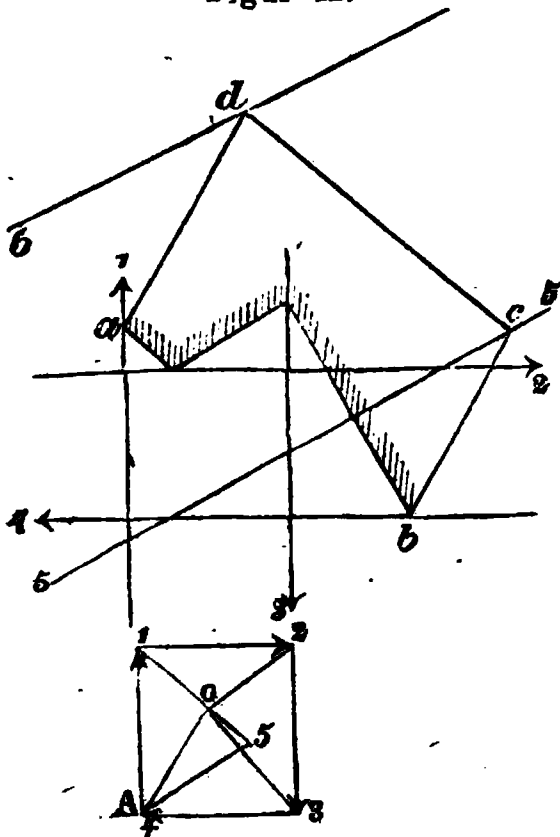


Figur 41.

Man bilde das Kräftepolygon Figur 41 bis Ecke 5, indem man Kraft 1 der Grösse nach unbestimmt lässt. Aus den Polstrahlen lässt sich dann das Seilpolygon verzeichnen und ist nur noch die Lage von Kraft 6 darin zu bestimmen. Zu dem Ende ziehe man in Figur 41  $0 6 \parallel a b$  Figur 40 und 6 Figur 40  $\parallel 5 6$  Figur 41.

### Kräftepaare.

Figur 42.



Figur 43.

Um zu einem Kräftepaare 1.2.3.4 Figur 42 ein 3tes; dessen Richtung in 5 5 Figur 42 gegeben ist, zu finden, bilde man zuerst das Kräftepolygon zu 1.2.3.4, Figur 43, wähle einen Pol 0 und ziehe die Polstrahlen 0 1, 0 2, 0 3, 0 4. Alsdann verlängere man 1 0 und ziehe 4 5 Figur 43  $\parallel 5 5$  Figur 42. Es lässt sich hierauf das Seilpolygon Figur 42 von  $a$  bis  $b$  wie gewöhnlich verzeichnen. Alsdann ziehe man

$c b$  Figur 42  $\parallel 0 4$  Figur 43,  
 $c d$  „ 42  $\parallel 0 5$  „ 43,  
 $a d$  „ 42  $\parallel 0 4$  „ 43,



man eine Parallele zu 5 5 Figur 42,  
raft 6. Die Grösse von 5 und 6 ist

! zwischen parallelen Kräften.

cht zwischen 3 parallelen Kräften.

Figur 44. 45. 46.

Man trage die Kraft an einem  
der beiden andern Angriffspunkte,  
z. B. bei a an, mache a d  $\parallel$  q,  
verbinde d mit dem anderen An-  
griffspunkt c.

Ziehe d f  $\parallel$  a b und verlängere q  
bis zum Schnittpunkte f, so ist

$$b e = p_1,$$

$$e f = p_2.$$

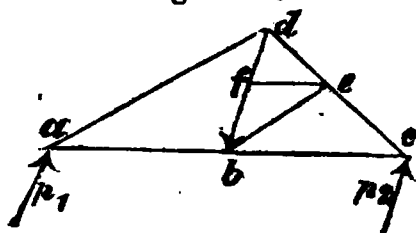
er Figur 47. 48. 49.

Man mache

$$d b = q.$$

Ziehe a d und d c nach den beiden  
anderen Angriffspunkten  
a und c.

Figur 48.



Ferner

$$b e \parallel a d,$$

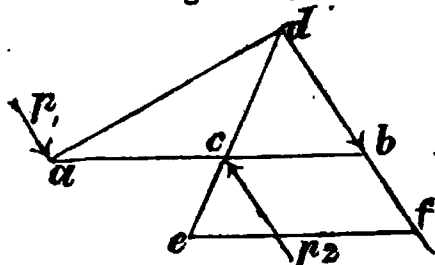
$$f e \parallel a c,$$

so ist:

$$b f = p_1,$$

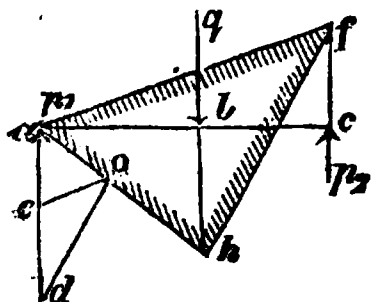
$$f d = p_2.$$

Figur 49.

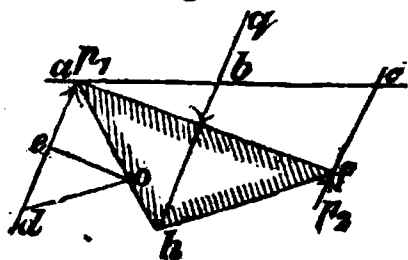


Oder Figur 50. 51.

Figur 50.



Figur 51.



Man mache

$$a d = q,$$

wähle einen beliebigen Pol o und ziehe die Polstrahlen a o und o d. Bilde dann das Gelenkpolygon a p f, indem man

$$a h \parallel a o,$$

$$p f \parallel o d$$

und die Schlusslinie a f zieht.

Legt man den Polstrahl

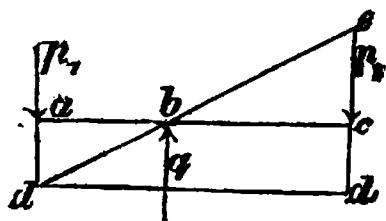
$$e o \parallel a f, \text{ so ist}$$

$$a e = p_1,$$

$$d e = p_2.$$

Oder Figur 52. 53.

Figur 52.



Man mache

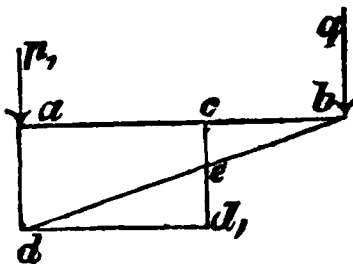
$$a d = p_2,$$

$$e c = p_1,$$

$$d d' \parallel a b,$$

verbinde d mit e, so ist b der An-

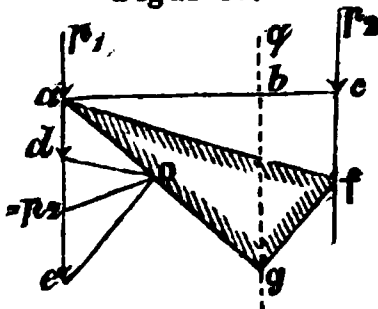
Figur 53.



griffspunkt von  $q$  und  
 $q = e d'$   
 $= p_1 + p_2.$

Oder Figur 54.

Figur 54.



Man mache

$a d \parallel p_1,$

$d e \parallel p_2,$

wähle den Pol  $o$  und ziehe die Polstrahlen

$a o, o d, o e,$

bilde das Gelenkpolygon  $a f g$ , indem

$a f \parallel o d,$

$f g \parallel o e,$

$a g \parallel a o$

gezogen wird. Der Schnittpunkt  $g$  von  $g f$  und  $a g$  liegt in der Richtungslinie der Mittelkraft  $q$ . Ihr Angriffspunkt  $b$  wird gefunden, indem man  $b g \parallel p_1$  und  $p_2$  legt, ihre Grösse ist  $= p_1 + p_2 = a e$ .

#### b. Gleichgewicht zwischen beliebig vielen Parallelkräften.

Wirken mehrere Parallelkräfte in der Ebene auf einen Körper, so kann man zur Bestimmung der Mittelkraft je zwei und zwei derselben vereinigen, bis man auf die Mittelkraft kommt und dazu die vorhin angeführten Methoden benutzen. Andererseits kann man die Mittelkraft finden, indem man das Kräftepolygon Figur 55 und das Seilpolygon Figur 56 bildet.

Figur 55.

Figur 56.

Zu dem Ende mache man:

Kraft 1 = Linie a 1 Figur 55,

„ 2 = „ 1.2 „

„ 3 = „ 2.3 „

„ 4 = „ 3.4 „

„ 5 = „ 4.5 „

u. s. w. und wähle den Pol o.

Ziehe b b Figur 56 || a o Figur 55,

g d „ || o 1 „

d e „ || o 2 „

e f „ || o 3 „

u. s. w. bis

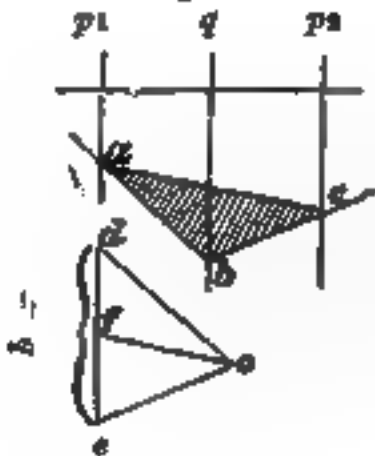
c c Figur 56 || o 7 Figur 55.

Der Durchschnittspunkt n von c c und b b ist ein Punkt der Mittelkraft q.

Zieht man n m Figur 56 || a 7 Figur 55, so ist dieses die Lage von q, während die Linie a 7 Figur 55 ihre Grösse ergiebt.

## Zerlegung von Kräften in zwei oder mehrere parallele Kräfte.

Figur 57.

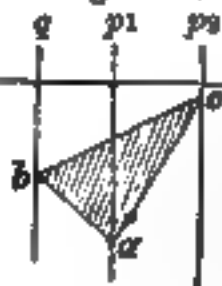


Figur 58.

Figur 60.



Figur 59.



Ist eine Kraft  $q$  in 2 Parallelkräfte von gegebener Lage zu zerlegen, die entweder zu beiden Seiten von  $q$ , Figur 57, oder beide auf einer Seite von  $q$  liegen, Figur 49, so bilde man das Gelenkpolygon  $a b c$  Figur 57 und 59, mache in Figur 58 und 60  $d e = q$  und ziehe  $d o$  und  $e o$  Figur 58 und 60 parallel den entsprechenden Seilpolygon-Seiten, d. h.

$d o$  Figur 58  $\parallel a b$  Figur 57,

$d o$  „ 60  $\parallel b c$  „ 59,

$e o$  „ 58  $\parallel b c$  „ 57,

$e o$  „ 60  $\parallel a c$  „ 59,

so ergibt sich der Pol  $o$  des Kräftepolygons. Zieht man  $o f \perp$  der 3ten Polygonseite, so ist

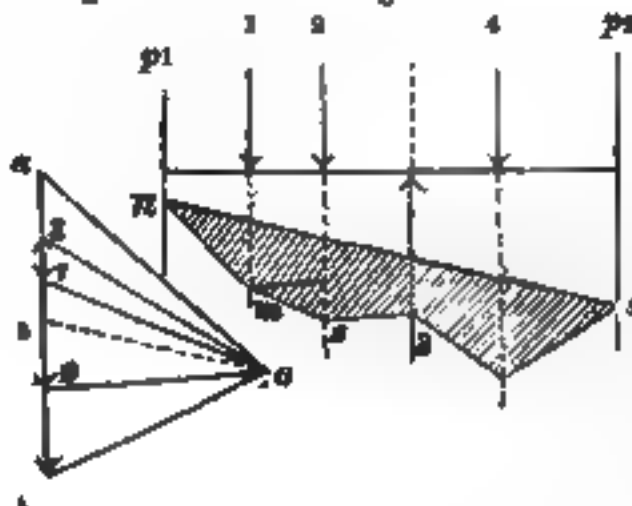
$$d f = p_1,$$

$$f e = p_2.$$

Die Zerlegung einer Kraft in mehrere Parallelkräfte erfolgt durch wiederholte Anwendung dieses Verfahrens.

Figur 62.

Figur 61.



Ist der Auflagerdruck  $p_1$  und  $p_2$  zu finden, den eine vertikale Belastung auf einen Träger ausübt, so konstruiere man aus den gegebenen Vertikalkräften 1 2 3 4 u.s.w. das Kräftepolygon Figur 62, wähle den Pol  $o$  und ziehe die Polstrahlen. Alsdann bilde man das Seilpolygon Figur 61, indem man

$$\begin{array}{l} nm \parallel ao, \\ ms \parallel ol \\ \text{u. s. w.} \end{array}$$

und zuletzt die Schlusslinie  $sn$  zieht.

Ein Polstrahl  $os \parallel sn$  gezogen, theilt a 4 Figur 62 in die beiden Auflagerdrucke

$$\begin{array}{l} p_2 = 4.5, \\ p_1 = 2.5. \end{array}$$

Ist die Belastung gleichförmig vertheilt, so geht das Polygonstück unter der Schlusslinie in eine Parabel über.

Figur 63.

Um dieselbe zu konstruiren, Figur 63, bilde man ein  $\triangle abc$ , dessen Ecken  $a$  und  $b$  unter den Auflagerpunkten liegen, halbire  $de$ ,  $ef$ ,  $fc$ ,  $cg$ ,  $gt$  u. s. w. in 1. 2. 3. . . I. II. III u. s. w. und ziehe die Linien  $aI$ ,  $d g$ ,  $I II$ ,  $eh$ ,  $2 III$  u. s. w.

Legt man  $ab \parallel$  dem Träger  $mn$ , so wird  $\frac{de}{2} = \frac{cg}{2}$ ,  
 $\frac{ef}{2} = \frac{gh}{2}$  u. s. w.

## Statische Momente paralleler Kräfte.

Figur 65.

a

1

2

3

4

5

### a. Ermittlung der statischen Momente der äusseren Kräfte.

Um bei Festigkeitsberechnungen an Trägern etc. das Moment der äusseren Kräfte für einen beliebigen Punkt  $k$ , Figur 64, des Trägers zu finden, bilde man zuerst das Kräftepolygon, Figur 65, aus der gegebenen Belastung und sodann das Seilpolygon, Figur 64. Zieht man durch  $k$  eine Parallele zu der Richtung der äusseren Kräfte, so ist das im Polygon liegende Stück  $m n =$  dem Momente der äusseren Kräfte für Punkt  $k$ . Zieht man in Figur 65

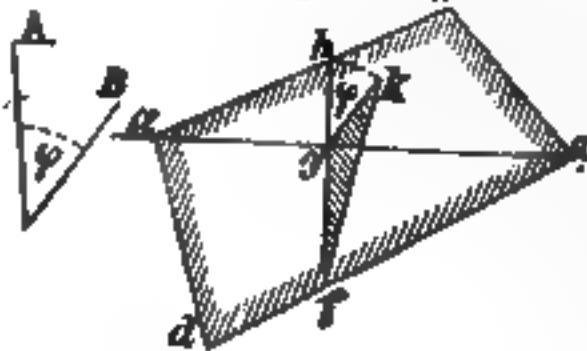
$o v \perp a 4.$

so ist  $o v$  die Maasseinheit für die auf diese Weise gefundenen Momente.

### b. Zusammensetzung und Zerlegung statischer Momente.

Figur 66.

Figur 67. b



Wirken parallele Kräfte in 2 Ebenen A und B mit dem  $\angle \varphi$  auf eine Axe  $a c$ , Figur 67, und ist für einen gewissen Punkt  $g$  das Moment in der einen Ebene  $= g h$ , in der anderen  $= g f$ , so findet man das resultierende Moment durch Bil-

dung des  $\triangle g k f$  mit dem Aussenwinkel  $\varphi$ . Dasselbe ist alsdann  $= k f$ .

Durch das umgekehrte Verfahren erfolgt die Zerlegung von Momenten.

### Schwerpunkts - Bestimmung.

Die Bestimmung des Schwerpunktes einer ebenen Figur lässt sich mittelst des Kräfteplanes (Seil- und Kräftepolygon) in vielen Fällen sehr leicht ausführen.

Man zerlegt die Figur in schmale Streifen von gleicher Breite, betrachtet die mittlere Länge derselben als Kräfte und bildet daraus das Kräfte- und Seilpolygon. Die Richtungslinie der Mittelkraft, die nach den vorangegangenen Sätzen leicht zu ermitteln ist, ist eine Schwerlinie.

Wenn die Figur nicht symmetrisch ist, so wiederholt man dasselbe Verfahren von einer andern Seite aus. Der Durchschnittspunkt der gefundenen Schwerlinie ist der Schwerpunkt.

### Kräftepläne für Fachwerks-Konstruktionen.

Ist ein gewisses Fachwerksystem gegeben und verzeichnet, so trage man zunächst die wirksamen äusseren Kräfte ein.

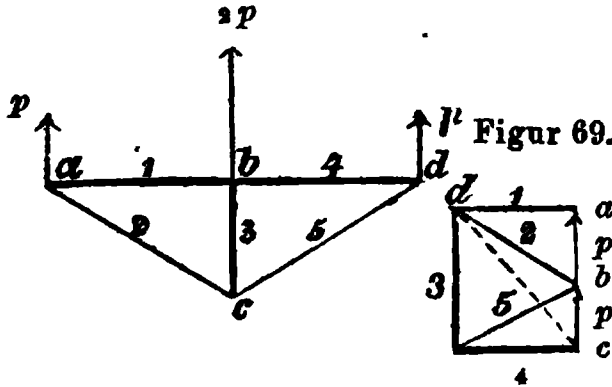
Von einem Knotenpunkte beginnend zerlege man die hier wirkende äussere Kraft nach den Richtungen der Stäbe, vereinige die gefundenen inneren Kräfte am nächsten Knoten mit den daselbst vorhandenen äusseren Kräften zu einer Mittelkraft, zerlege dieselbe wieder nach den folgenden Stabrichtungen und fahre in dieser Weise fort.

In dem Nachfolgenden sind die Kräftepläne für mehrere Fachwerksysteme aufgeführt. Die Druckkräfte sind mit starken, die Zugkräfte mit feinen Linien bezeichnet.



Die Nummern im Kräfteplan geben die Grösse der in den mit gleicher Nummer im Fachwerksystem bezeichneten Verbandstücken wirkenden Kräfte an.

Figur 68.



Figur 68 ist das System, Figur 69 der Kräfteplan. Man gelangt zu Letzterem durch folgende Konstruktion:

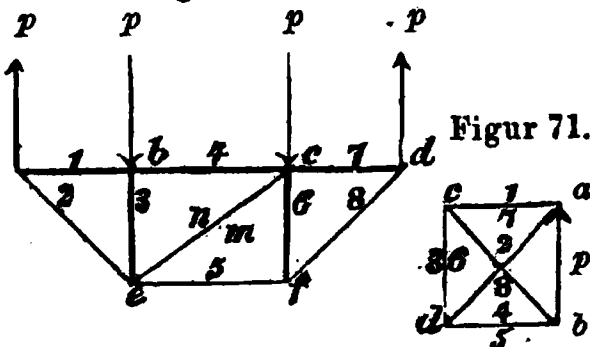
$$\begin{array}{lcl} a b \text{ Figur 69} & = & p, \\ b c & „ & = p. \\ 2 & „ & \parallel \text{ Figur 68,} \end{array}$$

wodurch  $p$  zerlegt ist in 1 und 2.

1 und  $2 \cdot p$  bei Knoten b Figur 68 in Figur 69 vereinigt, gibt die Mittelkraft d c Figur 69. Dieser zerlegt nach den Richtungen 3 und 4 Figur 68 gibt im Kräfteplan Figur 69 die Kräfte 3 und 4.

3 und 2 im Knoten c vereinigt, gibt die Mittelkraft 5 im Kräfteplan Figur 69.

Figur 70.



Figur 70 ist das System, „ 71 der Kräfteplan,  $a b \text{ Figur 71} = p$ ,  $p$  zerlegt in 1 und 2.

In Knoten b Figur 70 1 und  $p$  vereinigt, gibt als Mittelkraft c b Figur 71. Diese nach 3 und 4 Figur 70

zerlegt die Kräfte 3 und 4 im Kräfteplan.

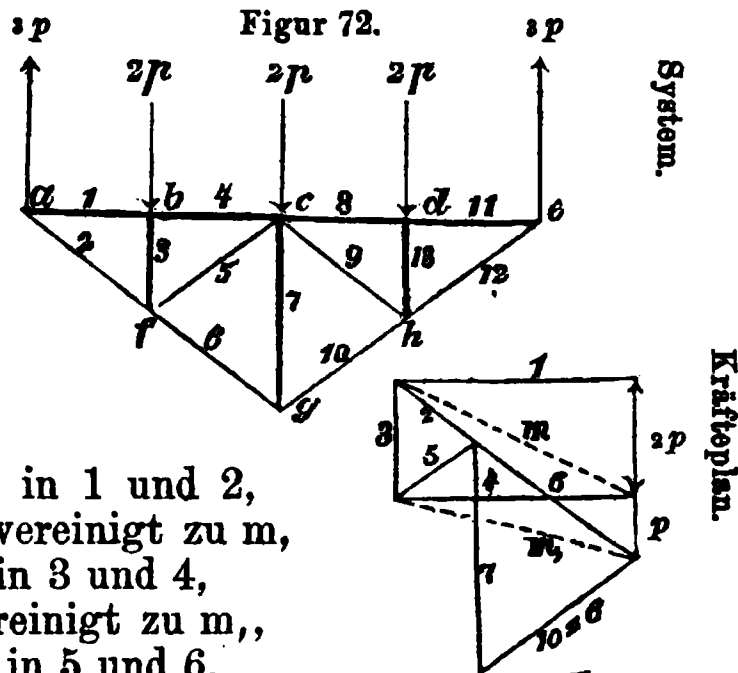
In Knoten e Figur 70 2 und 3 vereinigt, gibt als Mittelkraft b d im Kräfteplan, diese nach n und 5 Figur 70 zerlegt, gibt für n die Kraft = Null, nebst der Kraft 5 im Kräfteplan.

Zugband  $n$  ist daher überflüssig.

$p$  und  $4$  im Knoten  $c$  vereinigt, Figur 70, gibt  $a d$  in Figur 71.  $a d$  zerlegt nach  $6$  und  $7$ , Figur 70, gibt im Kräfteplan die Kräfte  $6$  und  $7$ .

In Knoten  $f$   $5$  und  $6$  vereinigt und nach  $8$  und Null zerlegt, gibt Kraft  $8$  im Kräfteplan.

Sind die Lasten in  $b$  und  $c$   $7 < p$ , so wird die Spannung in  $n$  und  $m$  nicht wie vorher = Null, sondern erlangt einen leicht zu ermittelnden Werth.



$3 p$  zerlegt in  $1$  und  $2$ ,  
 $1$  und  $2 p$  vereinigt zu  $m$ ,  
 $m$  zerlegt in  $3$  und  $4$ ,  
 $2$  und  $3$  vereinigt zu  $m$ ,  
 $m$ , zerlegt in  $5$  und  $6$ ,  
 $10 = 6$  vereinigt mit  $6$  zu  $7$ .

Figur 73.

Die Kräfte in den übrigen Stangen sind:

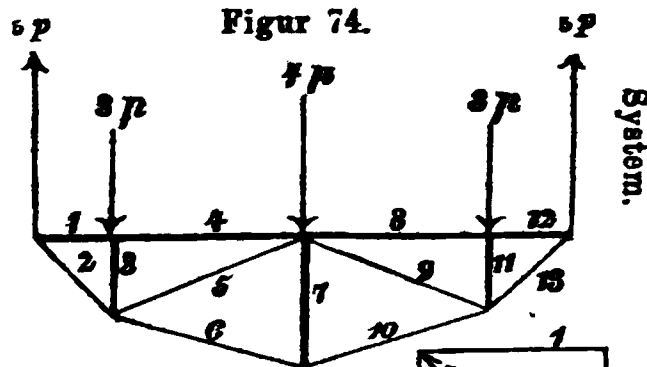
$$9 = 5,$$

$$8 = 4,$$

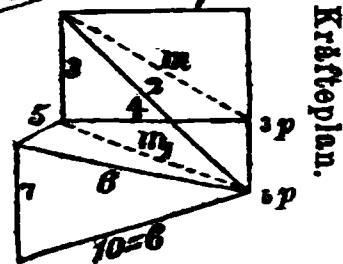
$$13 = 3,$$

$$11 = 1,$$

$$12 = 2.$$

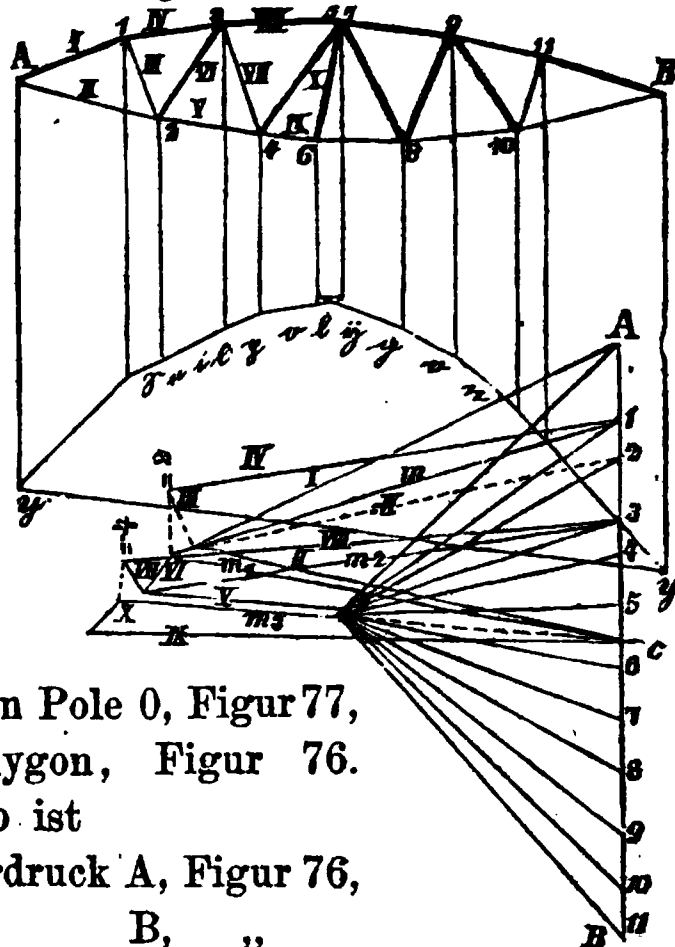


5 p zerlegt in 1 und 2,  
 1 und 3 vereinigt zu m,  
 m zerlegt in 3 und 4,  
 2 und 3 vereinigt zu m,,  
 m, zerlegt in 5 und 6,  
 6 und 10 = 6 vereinigt zu 7.



$$\begin{aligned} 8 &= 4, \\ 9 &= 5, \\ 11 &= 3, \\ 12 &= 1, \\ 13 &= 2. \end{aligned}$$

Figur 76. Allgemeines System.



Das beliebige  
 Fachwerk, Figur  
 76, sei mit den  
 beliebigen Kräf-  
 ten 1·2·3 u. s. w.,  
 Figur 77, belastet.  
 Man bilde das

Kräftepolygon

mit dem beliebigen Pole 0, Figur 77,  
 und das Seilpolygon, Figur 76.  
 Ziehe  $yy \parallel oc$ , so ist

$A c$  = Auflagerdruck A, Figur 76,  
 $B e$  = „ B, „

Den Kräfteplan bilde man ganz wie früher, Figur 72—75, nämlich:

A C zerlegt in I und II,  
 I und 1 vereinigt in m,  
 m zerlegt in III und IV,  
 II·III·2 vereinigt zu m,,  
 m, zerlegt in V und VI,  
 IV·VI·3 vereinigt zu m<sub>2</sub>,  
 m<sub>2</sub> zerlegt in VII und VIII,  
 V·VII·4 vereinigt zu m<sub>3</sub>,  
 m<sub>3</sub> zerlegt in IX und X

u. s. w.

Auf die angeführte Weise lassen sich die Kräfte, die an den Konstruktionstheilen von Fachwerken jeder beliebigen Form wirken, bestimmen, wenn die Laststellung gegeben ist.

Sobald das Fachwerksystem einfacher, gewisse Dimensionen und Kräfte konstant sind, vereinfacht sich der Kräfteplan erheblich.

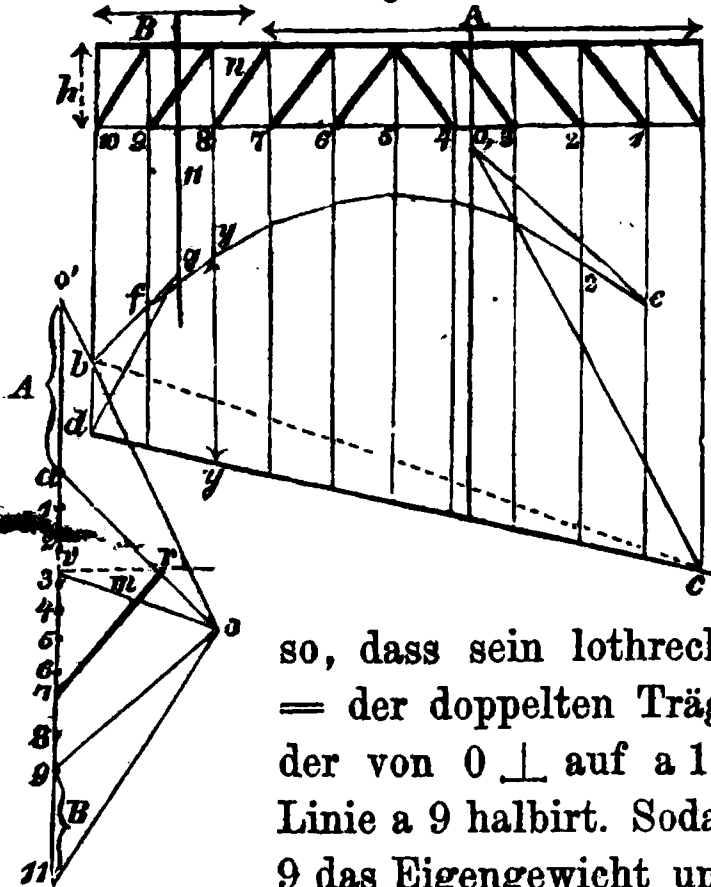
Die in Figur 76 und 77 gegebene Konstruktion verlangt bei Brückenträgern für jede Laststellung ein besonderes Kräftepolygon; sobald indessen das Fachwerksystem einfacher wird, lassen sich alle Polygone der für die einzelnen Glieder ungünstigsten Laststellung in einer einzigen Figur vereinigen.

Bei solchen Trägern, welche keine mobile Belastung zu tragen haben, kann man die Verzeichnung des Seilpolygons unterlassen, da die Auflagerdrucke sich oftmals leichter durch Rechnung finden lassen. Der Kräfteplan kann dann sofort entworfen werden. Namentlich ist dieses bei gleichmässig vertheilter Belastung sehr leicht auszuführen.

Ein Beispiel für Träger mit mobiler Belastung liefert Figur 78. Es ist hier angenommen, dass für das n<sup>te</sup> Feld die Spannungen in den Stangen bei der ungünstigsten Laststellung ermittelt werden sollen. Die Spannung in den Streben erreicht ihr Maximum, wenn eine Seite des

Trägers von der zu unterführenden Stelle ab belastet, die andere aber frei ist. Die Spannung in den Gurtungen erreicht ihr Maximum, wenn der ganze Träger belastet und bei der zu untersuchenden Stelle  $n$ , Figur 78, die schwersten Lasten konzentriert sind.

Figur 78.



Figur 79.

so, dass sein lothrechter Abstand von  $a_{11}$  = der doppelten Trägerhöhe  $h$  ist und dass der von  $0 \perp$  auf  $a_{11}$  gezogene Strahl die Linie  $a_9$  halbiert. Sodann trage man von  $a$  bis  $9$  das Eigengewicht und von  $a$  bis  $0$ , die Last  $A$  auf, ziehe:

$c o'$  Figur 78  $\parallel$   $o o$ , Figur 79,

$o' e$  „  $\parallel$   $o a$  „

$e 2$  „  $\parallel$   $o 1$  „

u. s. w.,

wodurch der Seilpolygonzug  $c o, e 2 y f b$  entsteht.

Zieht man  $m$  Figur 79  $\parallel$   $b c$  Figur 78,

$v r$  „  $\parallel$   $8 7$  „

$7 r$  „  $\parallel$  der Diagonalstrebe  $8$ ,

so ist:

$7 r$  = der Maximal-Spannung in der Diagonalstrebe  $8 \cdot 7$ ,

Um die Maximalspannungen im  $n$ ten Feld (in Figur 78, Feld 7—8) zu finden, trage man über den Träger die einseitige Belastung  $A$  und deren mittlere Drucklinie  $0$ , auf. Im Kräftepolygon Figur 79 wähle man den Pol  $o$

$v_7$  = der Maximal-Spannung in der  
Vertikalstrebe 8.

zu fin-

Um die Max  
den, belaste man  
und ziehe die mi

d;  
wodurch der Sei

Zieht man  
yy auf

ur  
Führt man  
an den übrigen  
Spannungen in

Ist der  
lastet, so b  
Poldistanz  
polygon.  
Zieht

zu den Diagonalstreben, so geben diese den Druck in denselben an und es ist

9 10 der Druck in Diagonale 9 10,

8 9 „ „ „ „ 8 9

u. s. w.

a, 10 der Druck in der Diagonale 0 1,

1 9 „ „ „ „ 1 2

u. s. w.

Zugleich geben die Längen  $x_5, x_6$  u. s. w. die Zugspannung in den Hängestangen an und es ist

$x_5$  = die Spannung in Hängestange 6 Figur 80,

$x_6$  = „ „ „ „ 7 „

$x_7$  = „ „ „ „ 8 „

Die Ordinaten  $b, c, d, e, f$  u. s. w. im Seilpolygon endlich geben die Spannungen in den Gurtungen an und es ist

$b$  = der halben Spannung 8 9 im Ober- und 9 10 im Unter-  
gurte,

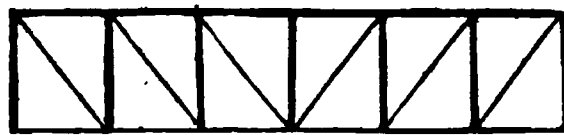
$c$  = „ „ „ 7 8 „ „ 8 9 „ „

$d$  = „ „ „ 6 7 „ „ 7 8 „ „

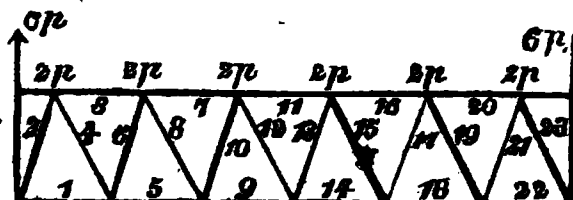
u. s. w.

In ganz ähnlicher Weise wird das System (Figur 82) behandelt.

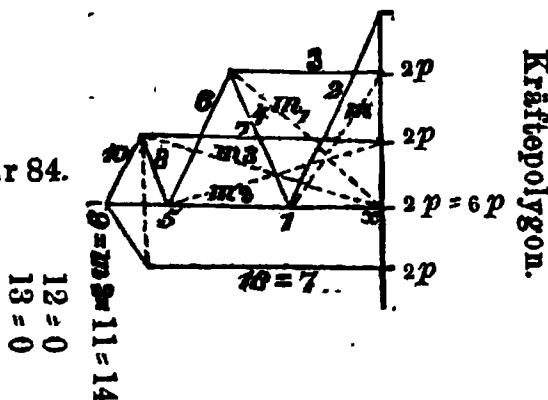
Figur 82.



Figur 83.



Figur 84.

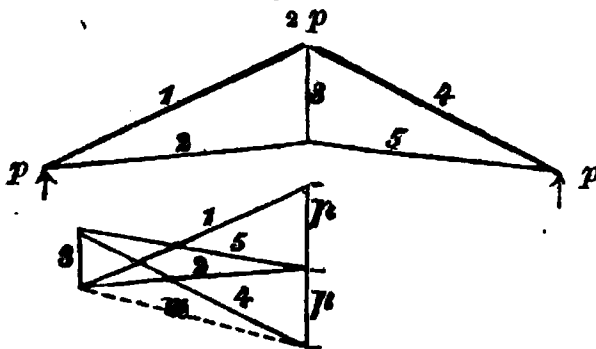


$6p$  zerlegt in  $x1 = 1$  und  $2$ ,  
 $2$  und  $2p$  verbunden zu  $m$ ,  
 $m$  zerlegt in  $3$  und  $4$ ,  
 $1$  und  $4$  verbunden zu  $m$ ,  
 $m$  zerlegt in  $x5 = 5$  und  $6$ ,  
 $3$  und  $2p$  verbunden zu  $m_2$ ,  
 $m_2$  zerlegt in  $7$  und  $8$ ,  
 $5$  und  $8$  verbunden zu  $m_3$ ,  
 $m_3$  zerlegt in  $x9 = 9$  und  $10$ ,  
 $7 \cdot 10 \cdot 2p$  verbunden zu  $m_3 = 9 = 11 = 14$ ,  
da  $13$  und  $14 = \text{Null}$  wird.

Zerlegt man  $m_2$  in  $2p \cdot 15 \cdot 16$ , so ergibt sich  
 $15 = 10$ ,  
 $16 = 7$ .

Führt man in der Konstruktion fort, so ergibt sich  
noch  
 $17 = 8$ ,  
 $18 = 5$ ,  
 $19 = 6$ ,  
 $20 = 3$ ,  
 $21 = 4$ ,  
 $22 = 1$ ,  
 $23 = 2$ .

Figur 85.



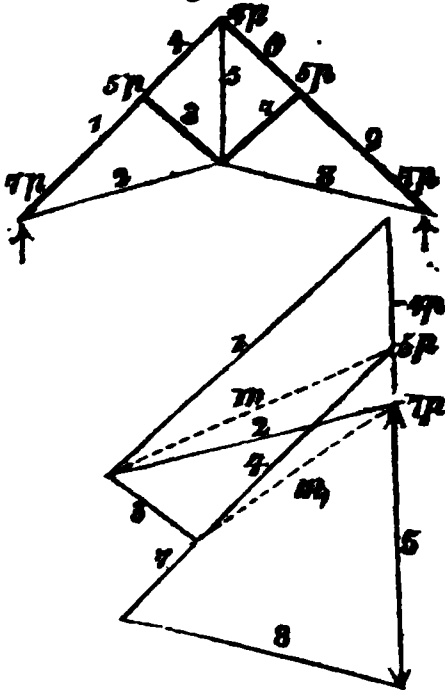
Figur 86.

Für das Dachstuhl-  
system (Figur 85)  
bildet sich der Kräfte-  
plan (Figur 86) wie  
folgt:

$p$  (Figur 86) zerlegt in  $1$  und  $2$ ,  
 $1$  und  $2p$  verbunden zu  $m$ ,  
 $m$  zerlegt in  $3$  und  $4$ ,  
 $2$  und  $3$  verbunden zu  $5$ .



Figur 87.



Das Dachbindersystem (Figur 87) hat den Kräfteplan (Figur 88).

Derselbe bildet sich wie folgt:

7 p zerlegt in 1 und 2,  
1 und 5 p verbunden zu m,  
m zerlegt in 3 und 4,  
2 und 3 vereinigt zu m,,  
m, zerlegt in 7·8·5,

wobei  $7 = 3$  und  $\parallel 7$  Figur 87 zu machen ist.

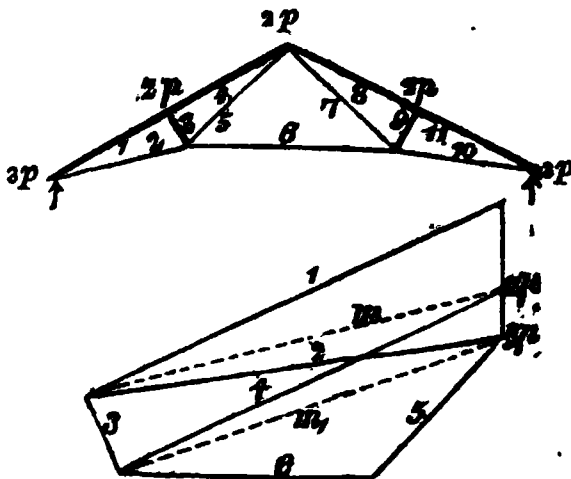
Alsdann ist ferner:

$$6 = 4,$$

$$9 = 1.$$

Figur 88.

Figur 89.



Der Kräfteplan (Figur 90) zum Dachbindersystem (Figur 89) entwickelt sich wie folgt:

3 p zerlegt in 1 und 2,  
1 und 2 verbunden zu m,  
m zerlegt in 3 und 4,  
2 und 3 verbunden zu m,,  
m, zerlegt in 5 und 6.

Figur 90.

Alsdann ist ferner:

$$7 = 5,$$

$$8 = 4,$$

$$9 = 3,$$

$$11 = 1,$$

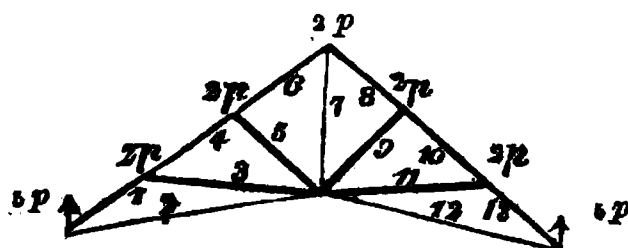
$$10 = 2.$$

Ganz ähnlich ist das System (Figur 91) zu behandeln.

Figur 91.

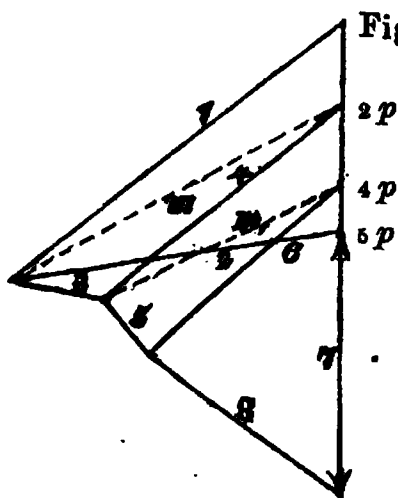


Figur 92.



Der Kräfteplan (Figur 93) zum Dachbindersystem (Figur 92) bildet sich wie folgt:

5 p zerlegt in 1 und 2,  
1 u. 2 verbunden zum m,  
m zerlegt in 3 u. 4,  
4 u. 2 p verbunden zu  
m,,  
m, zerlegt in 5 u. 6,  
8 = 6 verbunden zu 7.

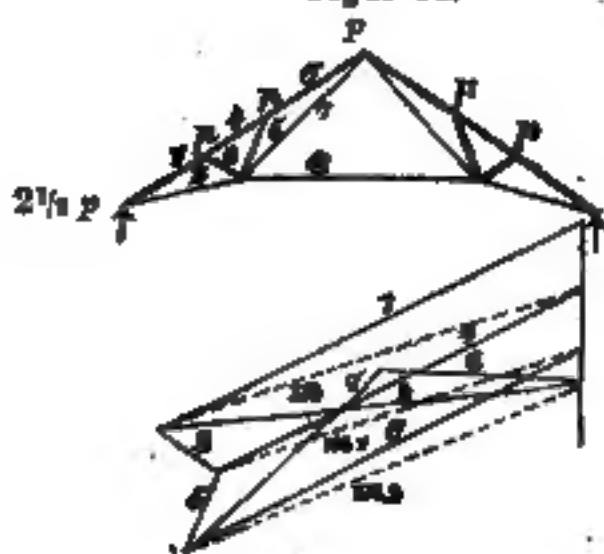


Figur 93.

Alsdann ist:

$$\begin{aligned} 9 &= 5, \\ 10 &= 4, \\ 11 &= 3, \\ 12 &= 2, \\ 13 &= 1. \end{aligned}$$

Figur 94.

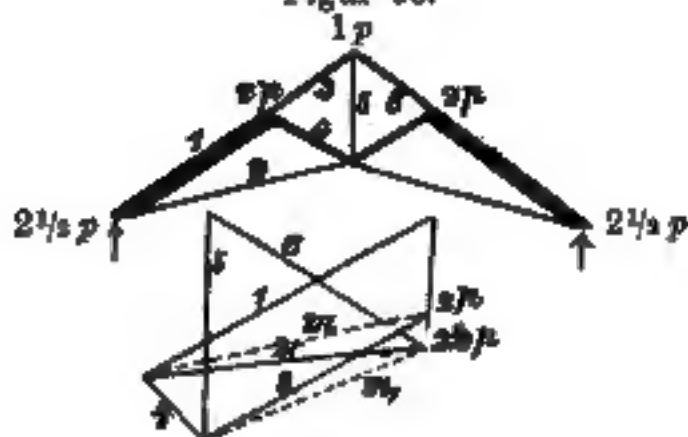


Das System in Figur

94 liefert den Kräfteplan  
(Figur 95) wie folgt:  
1 p 3 1/2 p zerlegt in 1 und 2,  
2 p 1 u. p verbunden zu m,  
m zerlegt in 3 und 4  
u. s. w.

Figur 95.

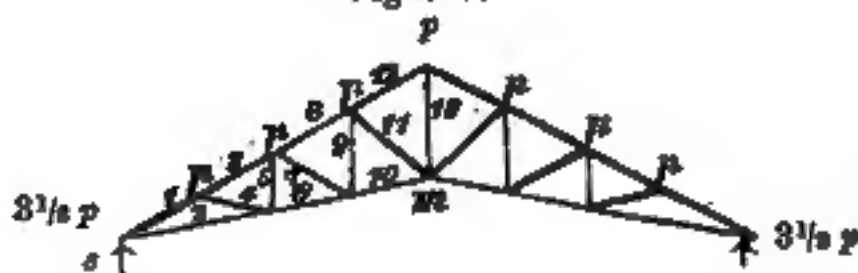
Figur 96.



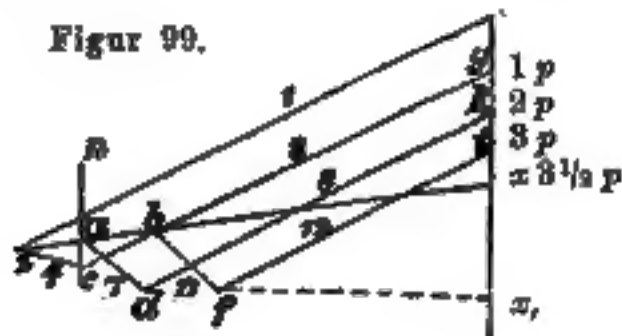
Figur 97 ist der auf  
ähnliche Weise gebildete  
Kräfteplan zum Dach-  
bindersystem. Figur 96.

Figur 97.

Figur 98.



Figur 99.



Für das System  
(Figur 98) bildet  
sich der Kräfte-  
plan Figur 99 wie  
folgt. Man mache:

1 || sp; x 2 || sm;  
2 c || Strebe 4 in  
Figur 98;  
en || xx; cg || l;  
a d || Strebe 7 in  
Figur 98;

$bd \parallel xx$ ;  $dk \parallel 1$ ;  $bf \parallel$  Strebe 11 in Figur 98;  
 $fi \parallel 1$ ;  $fx \perp xx$ , so ist:

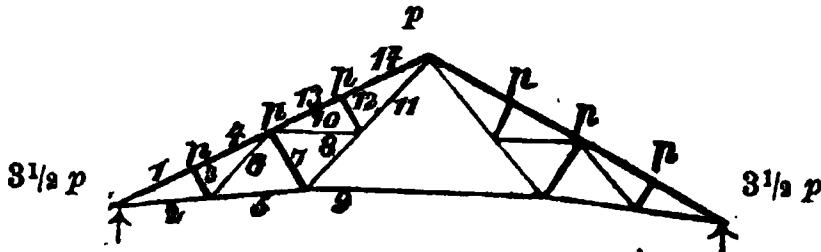
in den Parallelen 1·3·8·12 die Spannung in den Sparrenstücken 1·3·8·12 (Figur 98) ermittelt. Ferner geben die Linien 2c, ad, bf die Spannung in den Streben 4, 7, 11, die Vertikalen ae, bd und xx, die Spannung in den Hängeeisen 4, 9, 13 (Figur 98) an. Endlich ist:

$x2 =$  der Spannung in 2, Figur 98,

$xa =$  „ „ „ 6, „

$xb =$  „ „ „ 10, „

Figur 100.



Um zu dem System (Figur 100) den Kraftplan zu bilden mache man

1  $\parallel$  dem Sparren,

$x2 \parallel$  2 Figur 100,

2a  $\parallel$  3 Figur 100,

ab  $\parallel$  1 Figur 191,

ac  $\parallel$  6 Figur 100,

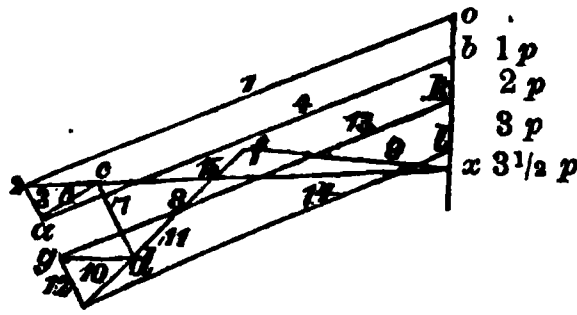
cd  $\perp$  ab und  $=$  der doppelten Projektion von  $ac \times p$ .

Ferner  $df \parallel 8$ ;  $fx \parallel$  Figur 100;  $gd \parallel 10$  Figur 100 und

$= ac$  Figur 101;  $gh \parallel 2a$  Figur 101 und bis zum

Schnittpunkt mit der Verlängerung von  $df$ . Endlich ziehe

man  $gk$  und  $hl \parallel$  Figur 101, so geben die Parallelen 2o;



Figur 101.

h l; die Spannungen in den Sparrenstiel  
 ; und die Normalen 2 a; c d; g n die  
 den Streben 3, 7, 12 Figur 100 an. Fern  
 Figur 101 = der Spannung in 2 Figur 100,

|   |   |   |   |    |   |
|---|---|---|---|----|---|
| „ | = | „ | „ | 5  | „ |
| „ | = | „ | „ | 9  | „ |
| „ | = | „ | „ | 8  | „ |
| „ | = | „ | „ | 11 | „ |

parrenstück  
; g u die  
) an Fern  
Fig. 100.

## Druckfehler.

Seite 222 Zeile 12 lies statt

$$\frac{b}{\cos. \rho} ; \frac{a}{\cos. \rho}$$

Seite 227 Zeile 4 lies statt

$$(\alpha + \beta)^0 ; (\alpha + \gamma)^0.$$

Seite 234 Zeile 9 lies statt

$$\frac{2 \sin. \frac{1}{2} \beta (a c)}{a - c} ; \frac{2 \sin. \frac{1}{2} \beta \sqrt{a c}}{a - c}$$

Seite 236 Zeile 9 lies statt

$$\frac{2 \sin. \frac{1}{2} \alpha (b c)}{(c - b)} ; \frac{2 \sin. \frac{1}{2} \alpha \sqrt{b c}}{(c - b)}$$

~~~~~

ed
Fern
= a c
Schnitt
man